Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН
Институт прикладной астрономии РАН

П.А. Тараканов, А.В. Веселова, М.И. Волобуева,
В.В. Григорьев, М.В. Костина, Б.Б. Эскин

Задачи XXIV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады

Санкт-Петербург
2017

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор К.В. Холшевников (СПбГУ)
доктор физ.-мат. наук, профессор В.П. Пронин (РГПУ им. Герцена)

*Печатается по постановлению
Учебно-методической комиссии по укрупненной группе направлений
и специальностей 03.00.00 «Физика и астрономия»*

**Тараканов П.А., Веселова А.В., Волобуева М.И.,
Григорьев В.В., Костина М.В., Эскин Б.Б.**

Задачи XXIV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиады:
учебно-методическое пособие — СПб, 2017. — 93 с.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на XXIV Санкт-Петербургской Астрономической олимпиаде (2016–2017 учебный год) и решения задач. Сборник может быть использован как для углубленного изучения астрономии в средней школе (в том числе для подготовки к олимпиадам различных уровней), так и в рамках курса «Общая астрономия» студентов Астрономического отделения СПбГУ и других университетов, ведущих подготовку астрономов или учителей физики и астрономии.

1 Введение

В 1993 году в Санкт-Петербурге прошла первая экспериментальная городская олимпиада по астрономии. Она была настолько экспериментальной, что даже не получила порядкового номера. Правила ее проведения сильно отличались от последующих олимпиад, в частности не было разделения по возрастным группам.

Следующая олимпиада — 1994 года — проводилась уже по правилам, которые в своей основе сохранились до настоящего времени. Школьникам было предложено пять заданий, разбитых на две группы: для 8–9 и 10–11 классов. В 1995 году впервые появились задания для 6 и 7 классов, которые впоследствии стали обязательной составной частью олимпиад, а в 2009 году появилась и параллель 5 класса.

Олимпиада развивалась, увеличивалось количество участников олимпиады. Это привело к необходимости предварительного отбора участников, и к концу 90-х годов появился заочный отборочный (а затем, с 2010 года, и очный) тур, задача которого состояла в предварительном отборе участников теоретического тура олимпиады.

Постепенно сформировались традиции Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. Среди этих традиций — задачи, максимально приближенные к реальной работе астронома, желательно на основе реальных астрономических событий и данных, составление практически непересекающихся комплектов заданий для различных возрастных параллелей, причем только «собственного производства». На Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде запрещается пользоваться калькуляторами, чтобы приучать школьников проводить оценочные расчеты и корректно учитывать точность используемых данных.

С 2003 года олимпиада стала открытой, в ней начали принимать участие школьники из различных регионов РФ, а затем и других стран. Начиная с 2010 года туры олимпиады проводятся одновременно во многих городах. В последние годы олимпиада проходит примерно на 50 площадках в различных регионах России и 12 других стран.

Предлагаемые на Санкт-Петербургской астрономической олимпиаде задачи, как правило, обладают некоторыми специфическими особенностями. Первой особенностью является необычно большая доля задач астрофизической тематики, в том числе и тех разделов, которые, как правило, в традиционных курсах астрономии для школ и кружков практически не рассматриваются (физика межзвездной среды, космология, радиоастрономия и т.д.). В целом от участника олимпиады требуется не только умение решать задачи по астрономии «классического» типа, но и широкие знания по всем разделам астрономии и умение этими знаниями пользоваться.

Еще одной особенностью является необходимость оценки промежуточных данных, нужных для решения задач. Как правило, участникам олимпиады сообщаются только те числовые данные, которые школьники заведомо не могут оценить или получить из других известных им величин (по крайней мере, за отведенное на решение задач время). Основные физические константы также считаются известными участникам.

Как правило, задачи олимпиады требуют для решения повышенного уровня знаний по физике и математике. Например, уравнение, получившееся в процессе решения задачи, может оказаться нетривиальным, и для его решения потребуется либо воспользоваться каким-либо «олимпиадным» математическим приемом, либо аккуратно упростить его, воспользовавшись физически корректным приближением. В силу специфики предмета олимпиады необходимые дополнительные знания по физике и математике нередко выходят даже за пределы «классической» тематики физических и математических олимпиад. В качестве примеров можно упомянуть физику излучения (в т.ч. и квантовую), ядерную физику, некоторые разделы математического анализа и геометрии, теорию погрешностей и т.д.

По сложившейся традиции какими-либо вычислительными средствами (калькуляторами и т.п.) на заключительном этапе олимпиады (теоретическом и практическом турах) пользоваться запрещено, однако на олимпиадах практически отсутствуют задачи, решить которые без трудоемких вычислений невозможно. В то же время иногда встречаются задачи, существенным элементом решения которых является нахождение эффективных методов получения численного ответа.

На каждом из туров, кроме практического, участникам предлагается решить по 5 задач. На решение задач очного отборочного тура отводится 3 часа, при этом можно пользоваться калькуляторами, но не справочными данными и литературой. Заочный отборочный тур занимает около месяца, при выполнении его заданий можно пользоваться любыми данными (нередко для решения задачи нужно предварительно найти какие-либо дополнительные данные) и любой вычислительной техникой (в частности, одним из возможных методов решения задач может быть программное моделирование).

На турах заключительного этапа — теоретическом и практическом — запрещены уже любые справочные данные и вычислительная техника. На решение 5 задач теоретического тура у участников есть 4 часа, на практическом туре, продолжающемся 2.5 часа, в каждой параллели предлагается одна (иногда две) задачи, связанных с обработкой наблюдательных данных, их интерпретацией, разработкой методов наблюдений и т.п.

Туры	**Класс**						
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
очный отборочный	1–5			6–10		11–15	16–20
заочный отборочный	21–25		26–30		31–35	36–40	41–45
теоретический	45–50		51–55		56–60	61–65	66–70
практический	71		72		73	74	75

В таблице указано, на каком из туров и каким классам предлагались задачи, включенные в сборник. По традиции задачи для младших возрастных параллелей общие для двух (иногда трех) классов, однако итоговый конкурс является раздельным и места победителей и призеров присуждаются в каждом классе отдельно.

В разделе 2 сборника для удобства самостоятельной работы с ним приведены только условия задач, раздел 3 содержит как условия, так и решения задач.

Авторами задач, включенных в сборник, являются А.В. Веселова, М.И. Волобуева, В.В. Григорьев, С.Г. Желтоухов, Г.М. Карелин, М.В. Костина, И.Д. Маркозов, П.В. Стрекалова, П.А. Тараканов, А.А. Федотов, Б.Б. Эскин.

2 Условия задач

Задача № 1

Радиус орбиты Нептуна 30 а.е, Юпитера — 5 а.е. Какая из этих планет через один земной год заметнее для земного наблюдателя сдвинется на фоне звезд? Почему?

Задача № 2

Иногда в одном календарном месяце происходят сразу два полнолуния, хотя это достаточно редкое событие. Но совсем редко по два полнолуния происходят сразу в двух календарных месяцах одного года. В какие месяцы года это может произойти? Объясните свой ответ.

Задача № 3

Атмосфера звезды на 70% по массе состоит из водорода и на 30% — из гелия. Во сколько раз в атмосфере звезды больше атомов водорода, чем атомов гелия, если известно, что масса одного атома гелия в четыре раза больше, чем масса одного атома водорода?

Задача № 4

30 сентября 2016 года произошло покрытие Юпитера Луной. Определите длительность покрытия и день недели, в который произошло это событие. Свой ответ подтвердите расчетами.

Задача № 5

Российские спортсмены вылетели в Бразилию для участия в Летних олимпийских играх. Из Петербурга самолет вылетел в 11 часов по московскому времени и приземлился в аэропорту Рио-де-Жанейро в 19 часов по местному времени. В обратный путь самолет вылетел в 9 часов утра по местному времени и приземлился в Петербурге в 5 часов утра по московскому времени. Оцените долготу Рио-де-Жанейро по этим данным. С какой точностью Вы можете это сделать? Учтите, что декретного времени в Бразилии нет, а перевод часов на летнее время существует.

Задача № 6

Астероид 4732 Froeschle покрыл слабую звезду TYC 0522-00906-1 в созвездии Дельфина 7 августа 2016 года в 21 час 30 минут UTC. Определите, в какой день недели это событие наблюдалось в Петербурге.

Задача № 7

При наблюдении с Земли Марс находится в западной квадратуре, а Юпитер — в противостоянии. Марсианин одновременно отправил на Юпитер и на Землю радиосигнал с сообщением. Землянин получил сигнал в 12:00 по своим часам. Какое время показывали часы землянина, когда сигнал, отправленный на Юпитер, дошел туда? Марс расположен в 1.5 раза дальше от Солнца, чем Земля, а Юпитер — в 5.

Задача № 8

Фазой небесного тела называется отношение площади освещенной области видимого диска небесного тела к площади полного диска. При какой фазе Луны ее видимая звездная величина будет на $2^m.5$ больше, чем в полнолунии? Поверхностную яркость освещенной части диска Луны считать постоянной.

Задача № 9

Для трансляции телепередач используются радиоволны метрового диапазона, прием которых возможен в зоне прямой видимости передатчика. Оцените максимальное расстояние, на котором возможен прием передач, транслируемых Санкт-Петербургской телебашней, высота которой составляет 312 м, если известно, что антенна телеприемника располагается на высоте 35 м.

Задача № 10

Какую скорость сразу после старта необходимо развить ракете-носителю для того, чтобы отправить автоматическую межпланетную станцию к Юпитеру? Обоснуйте свой ответ.

Задача № 11

Любитель астрономии наблюдает переменную звезду в свой телескоп. В минимуме блеска звезда имеет видимую звездную величину 10^m, причем это предел проницающей способности телескопа. Его сосед пытается наблюдать эту переменную в свой телескоп, но диаметр его телескопа в 2.5 раза меньше, поэтому сосед может увидеть переменную только тогда, когда ее блеск достигает максимума. Какую видимую звездную величину звезда имеет в максимуме блеска?

Задача № 12

При наблюдении в некоторой местности высота звезды над горизонтом меняется в пределах от 32° до 64°. Определите склонение звезды и широту места наблюдения.

Задача № 13

Однажды в сентябре Марс находился в созвездии Рыб на расстоянии 1.5 а.е. от Солнца. Оцените минимальное увеличение телескопа, в который можно было бы увидеть диск планеты, если известно, что радиус Марса примерно в два раза меньше радиуса Земли.

Задача № 14

Модуль «Скиапарелли» должен был совершить мягкую посадку на Марс в 40 км от места работы марсохода «Оппортьюнити». Мог ли «Оппортьюнити» наблюдать место посадки «Скиапарелли», если известно, что высота марсохода немного меньше среднего роста человека? Существованием рельефа на Марсе можно пренебречь.

Задача № 15

Входящие в состав двойной системы звезды с массами 3 и 5 масс Солнца вращаются друг вокруг друга т.к. что расстояние между ними остается постоянным и равным 2 а.е. Найдите орбитальный период такой двойной системы.

Задача № 16

Высота верхней кульминации первой звезды больше высоты нижней кульминации второй звезды на 10° при наблюдении на широте $+70^\circ$. Определите разность склонений звезд.

Задача № 17

Транснептуновый объект (174567) Варда имеет спутник Ильмарэ. Оцените массы данных объектов в предположении одинаковой плотности, если известно, что Ильмарэ совершает оборот вокруг Варды за 5 суток, большая полуось орбиты составляет $4.2 \cdot 10^3$ км. Диаметр Варды оценивается в 690 км, радиус Ильмарэ составляет примерно 51% радиуса Варды.

Задача № 18

Оцените, во сколько раз могут отличаться наблюдаемые ширины линий в спектрах двух звезд: красного гиганта и голубого гиганта?

Задача № 19

Газовое облако HVC 040+01–282, расположенное на расстоянии 20 кпк от Солнца, имеет массу $5.8 \cdot 10^3$ масс Солнца и видимый угловой диаметр $52'$. Предположив, что облако полностью состоит из нейтрального водорода, оцените концентрацию атомов в нем.

Задача № 20

Плутон движется по орбите с большой полуосью 40 а.е. и эксцентриситетом 0.25. Его средний радиус равен 1.2 тыс. км, а геометрическое альбедо 0.6. Оцените диаметр объектива такого телескопа, в который Плутон мог бы хотя бы когда-нибудь наблюдать человек с нормальным зрением.

Задача № 21

Как долго длятся на Луне солнечные сутки?

Задача № 22

Один астролог утверждал, что 29 февраля 2200 года, когда Меркурий будет ясно виден на полуночном небе в созвездии Льва, произойдет конец света. Похоже, что нашим потомкам можно этого не бояться. Почему? Найдите все очевидные астрономические ошибки в этом высказывании.

Задача № 23

Известно, что слабые небесные объекты лучше всего наблюдать в полночь в то время года, когда они находятся в противоположной Солнцу части неба. Ну и, естественно, тогда, когда на небе нет Луны. Однажды в сентябре в период, благоприятный для наблюдения своей любимой туманности, любитель астрономии вышел во двор и увидел строго на юге Луну в первой четверти («растущую»). Сколько часов можно еще поспать любителю астрономии до момента, наилучшего для наблюдений туманности? Стоит ли ему огорчаться из-за присутствия Луны на небе? Ответ поясните.

Задача № 24

Когда — в ноябре или в феврале — Солнце может подняться на максимальную высоту над горизонтом в Петербурге? Объясните свой ответ.

Задача № 25

Ровно в полночь в небо Земли «выстрелили» мощным лазером. Через год Земля снова оказалась в той же точке своей орбиты, где провели эксперимент с лазером. Как далеко от Земли находился в это время световой сигнал, испущенный лазером?

Задача № 26

Как известно, географические полюса немного перемещаются по поверхности Земли, и их положение в некоторый момент известно с погрешностью $0''.002$.

Какому расстоянию (в единицах длины) на поверхности Земли соответствует эта погрешность?

Задача № 27

Первая планета оказывается в противостоянии чаще, чем вторая. Какая из них расположена дальше от Солнца?

Задача № 28

В конце октября на небе, рядом с тонким серпом старой Луны, можно было невооруженным глазом наблюдать планету. В какое время суток наблюдалась эта картина? Что это могла быть за планета? Как изменится последний ответ, если известно, что планета была яркой? Ответы обоснуйте.

Задача № 29

Почему телевизионные спутниковые антенны-«тарелки» в Петербурге всегда ориентированы примерно в южном направлении?

Задача № 30

При моделировании диска Галактики в рамках задачи N тел рассматривается система из 5×10^6 частиц. Какую массу (в кг) и объем (в пк^3) представляет такая «частица», если масса диска Галактики равна $\sim 5 \cdot 10^{10}$ масс Солнца и средняя плотность вещества в окрестностях Солнца составляет 0.1 массы Солнца в кубическом парсеке?

Задача № 31

Комета пролетела мимо Солнца по орбите с перигелийным расстоянием 0.5 а.е. С какой минимальной скоростью она должна была двигаться относительно Солнца в момент прохождения перигелия, чтобы больше никогда не вернуться к Солнцу?

Задача № 32

Оцените среднюю плотность Миранды, если ее средний радиус составляет 235 км, а время падения с обрыва высотой 20 км на ее поверхности составляет 12 минут.

Задача № 33

Видно ли невооруженным глазом звездное скопление, состоящее из 10 тысяч одинаковых звезд, звездная величина каждой из которых равна $+15^m$?

Задача № 34

Однажды, находясь в Калькутте, любитель астрономии увидел, что он солнечным днем... не отбрасывает тени! Назовите с точностью до месяца, когда это могло быть, если известно, что широта Калькутты $22°50'$ с.ш.

Задача № 35

Поле зрения телескопа составляет $2^{\circ}.6 \times 2^{\circ}.6$. Какое минимальное количество снимков потребуется сделать на данном телескопе, чтобы полностью сфотографировать скопление галактик в созвездии Волосы Вероники, если данное скопление расположено на расстоянии около 99 Мпк и имеет диаметр примерно 17 Мпк?

Задача № 36

Вычислите, во сколько (с точностью до часа) взойдет Луна над горизонтом 21 декабря в Петербурге, если известно, что в этот день она будет иметь фазу последней четверти? Наклоном орбиты Луны к эклиптике и уравнением времени пренебречь.

Задача № 37

Карта рельефа Венеры строилась методом радиолокации. Наблюдения проводились с Земли в тот момент, когда Венера была ближе всего к Земле. Перепады высот на поверхности Венеры измерялись с погрешностью 1 м. Оцените относительную точность часов, которые необходимо использовать при таких наблюдениях.

Задача № 38

Альтаир (α Орла) и Акрукс (α Южного Креста) имеют одинаковые видимые звездные величины в оптическом диапазоне. Какая из этих звезд будет ярче при наблюдении в ультрафиолетовой области спектра, если эффективная температура Альтаира равна 8000 K, а Акрукса — 28000 K?

Задача № 39

Средняя плотность вещества звезды — красного гиганта составляет $1.5 \cdot 10^{-7}$ г/см^3. Оцените минимально возможный период осевого вращения такой звезды.

Задача № 40

Карликовая галактика Чаша 2, открытая в январе 2016 г, расположена на расстоянии 118 кпк от Солнца и имеет абсолютную звездную величину

-8.2^m. Во сколько раз суммарная светимость данной галактики меньше светимости принадлежащего Млечному Пути шарового скопления Омега Центавра, расположенного на расстоянии $d = 18300$ св. лет и имеющего видимую звездную величину $m_c = +3.9^m$?

Задача № 41

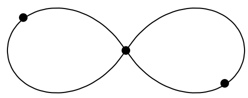
Источник гамма-всплеска GRB 060218, зарегистрированного на Земле в 2006 году, имеет красное смещение 0.0334. Какой геологический период был на Земле в тот момент, когда излучение гамма-всплеска было испущено источником?

Задача № 42

При наблюдении звезды в Пулковской обсерватории выяснилось, что ее высота в верхней кульминации в два раза меньше по абсолютному значению, чем в нижней кульминации. Каково склонение звезды?

Задача № 43

Астрономы открыли необычную тройную звездную систему, состоящую из трех одинаковых звезд, движущихся друг за другом по орбите, изображенной на рисунке. Чему равно максимально возможное изменение видимой звездной величины этой системы для внешнего наблюдателя?



Задача № 44

Спиральная галактика, видимая с ребра, излучает в радиодиапазоне в линии нейтрального водорода с длиной волны 21 см. Оцените ширину этой линии, если известно, что максимальная скорость вращения галактики составляет $3 \cdot 10^2$ км/с.

Задача № 45

У двойной звезды NGC 3603–A1 компоненты имеют примерно одинаковые массы и движутся по круговой орбите с периодом 3.77 дней и большой полуосью 0.283 а.е. Оценка суммы масс звезд при рождении равна $\approx 260 M_\odot$. Возраст системы оценивается в 1.5 млн лет. Сколько массы (в массах Земли) в среднем теряют звезды за 1 с?

Задача № 46

Житель Северного полушария Венеры наблюдает прохождение Меркурия по диску Солнца. В какую сторону будет двигаться Меркурий по диску? Почему?

Задача № 47

«Суперлунием» иногда называется ситуация, когда Луна во время полнолуния оказывается ближе всего к Земле. В некоторый момент Луна в момент новолуния оказалась в апогее. Будет ли ближайшее полнолуние «суперлунием»? Поясните свой ответ.

Задача № 48

Некоторые особо запасливые люди сохраняют старые календари для повторного их использования, когда распределение дат дней в году по дням недели снова повторится. Как Вы думаете, каким может быть максимально возможный срок хранения календаря до первого повторного использования? Определите год из XXI века, календарь которого для повторного использования придется хранить настолько долго, если известно, что 1 января этого года — суббота.

Задача № 49

Сегодня Луна покрыла Альдебаран (α Тельца). В какой фазе она при этом находилась? Известно, что в марте Луна опять покроет Альдебаран. В какой фазе она при этом будет?

Задача № 50

Нейтрино, прилетевший к Земле от сверхновой, вспышка которой наблюдалась в феврале 1987 года, пролетел сквозь Землю и полетел дальше. Считая, что нейтрино движется со скоростью света, оцените расстояние в километрах, на которое он к настоящему времени удалился от Земли.

Задача № 51

9 июля в 4 часа утра Луна наблюдается в полнолунии. В тот же день двумя часами позже Луна на небе окажется рядом с Плутоном. Когда наступит ближайшее противостояние Плутона?

Задача № 52

Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> Там высоко-высоко кто-то пролил молоко
> и получилась Млечная дорога.
> А вдоль по ней…
> …Месяц плывет, как белая пирога.

Для определенности будем считать, что при этом освещена ровно половина диска Луны, а рога месяца направлены вверх. Где примерно на Земле и в какое время года можно наблюдать подобную картину?

Задача № 53

С Земли производится радиолокация двух астероидов, один из которых находится в противостоянии, а другой — в квадратуре. Радиосигналы были посланы к астероидам одновременно, но от первого астероида сигнал вернулся обратно через 16 минут, а от второго — через 40 минут. Найдите расстояние между астероидами в этот момент. Определите радиусы орбит астероидов, считая, что орбиты круговые и лежат в плоскости эклиптики.

Задача № 54

Угловой размер Юпитера составляет $0'.5$. Оцените, насколько чаще в среднем Луна покрывает звезды, чем Юпитер.

Задача № 55

Студент-астроном заметил, что его старый механический будильник показывает одно и то же время каждый раз, когда Капелла оказывается на наибольшей высоте над горизонтом. Спешит или отстает будильник? На какое время он уйдет вперед или отстанет за один час?

Задача № 56

Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> …звезда с звездою говорит.
>
> — Который час?
>
> — Двенадцатый, примерно…
>
> — А на Земле в этот час лучше всего видно нас…

Считая, что разговор происходит сегодня, оцените возможные значения экваториальных координат разговаривающих звезд.

Задача № 57

Звезда Барнарда (V2500 Oph) имеет: собственное движение по прямому восхождению $-0.8''$/год, по склонению $10''.3$/год; ее лучевая скорость равна -110 км/с; ее годичный параллакс составляет $0''.55$. Определите, когда ее полное собственное движение было (или будет) максимальным. Чему оно при этом будет равно?

Задача № 58

В некоторой планетной системе звезда имеет радиус, равный солнечному. Одна из планет имеет радиус орбиты 0.3 а.е., вторая — 2 а.е. Плоскость орбиты первой планеты наклонена на 5° к плоскости вращения звезды, орбита второй планеты лежит в плоскости вращения звезды. На поверхности звезды имеется пятно на широте $+10^\circ$. Можно ли с экватора второй планеты наблюдать затмение первой планетой пятна, если ось вращения второй планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты?

Задача № 59

Оцените путь, который Солнце проходит в Солнечной системе (относительно центра масс Солнечной системы) за год.

Задача № 60

Звезда, имеющая видимую звездную величину 5^m, расположена на расстоянии 100 пк от Солнца. На каком расстоянии от звезды должна располагаться планета, чтобы количество энергии, приходящее на единицу площади планеты, было таким же, как на Земле от Солнца?

Задача № 61

Оцените, во сколько раз светимость Земли больше суммарной светимости всех людей на планете.

Задача № 62

Астероид наблюдался в Петербурге 23.12.2015 в истинную солнечную полночь в верхней кульминации на высоте 53°. 23.12.2016 он наблюдался в верхней кульминации уже через 6 часов после полуночи на высоте 30°. Определите параметры орбиты астероида, считая его орбиту круговой.

Задача № 63

Сверхновая Тихо Браге появилась на небе 6 ноября 1572 года и имела в максимуме блеск, равный -4^m. Сверхновая Кеплера появилась на небе 9 октября 1604 года и имела в максимуме блеск $-2^m.5$. Считая, что в максимуме блеска обе сверхновые имели абсолютную звездную величину, равную $-19^m.5$, определите, вспышка какой из Сверхновых произошла раньше и насколько.

Задача № 64

Для изменения орбиты опасного астероида диаметром 300 м предлагается ударить по нему тяжелой твердой болванкой массой 300 кг, двигающейся со скоростью 10 км/с относительно астероида. Известно, что большая полуось орбиты астероида равна 1 а.е., а ее эксцентриситет не превосходит 0.25. Оцените, в каких пределах может измениться большая полуось орбиты этого астероида вследствие такого столкновения.

Задача № 65

Для объяснения аномального отрицательного ускорения АМС «Пионер-10» предполагалось существование вещества, при движении в котором АМС замедляется из-за столкновения с его частицами. Допустим, что вещество сферически-симметрично заполняет пространство вокруг Солнца с постоянной плотностью. Оцените плотность вещества, если известно, что полное аномальное ускорение, обусловленное столкновениями и гравитационным притяжением АМС веществом, на расстоянии 100 а.е. от Солнца равно 10^{-9} м/с^2. АМС удаляется от Солнца с параболической скоростью, масса станции равна 200 кг, площадь поперечного сечения станции равна 1 м^2. Можно считать, что столкновения АМС с частицами абсолютно упругие.

Задача № 66

Работавший в России австрийский астроном Й. фон Литтров предлагал для связи с марсианами выкопать в Сахаре каналы, заполнить их смесью воды с керосином и поджечь. Допустим, таким образом «написаны» буквы размером 500 км каждая. Оцените минимально необходимый диаметр объектива телескопа, угловое разрешение которого достаточно для того, чтобы прочитать такой текст с Марса.

Задача № 67

Предположим, что в результате катастрофы Солнце мгновенно сжалось настолько, что период его осевого вращения стал равен 3 секундам. Оцените среднюю температуру Солнца сразу после катаклизма. Считайте, что теплопотери во время сжатия и взаимодействие с какими-либо другими телами отсутствовало.

Задача № 68

При обработке данных о регистрации нейтрино от вспышки сверхновой в Большом Магеллановом облаке (БМО) 23.02.1987 возникло предположение, что нейтрино «опоздали» на 50 минут от ожидаемого момента из-за того, что скорость движения нейтрино была чуть меньше скорости света в вакууме. Оцените в рамках этого предположения массу нейтрино, если известно, что энергия каждого из зарегистрированных нейтрино составляла около 10^{-12} Дж. Расстояние до БМО — 50 кпк.

Задача № 69

При вспышке сверхновой SN1987A выделилась энергия 10^{46} Дж. Оцените массу звезды, которая излучит столько же энергии за всю свою жизнь на стадии Главной последовательности.

Задача № 70

«Так стояли Эльвэ и Мелиан, а вращающийся над ними звездный небосвод отсчитывал долгие годы. И деревья Нан Эльмота стали выше и темнее, прежде чем Мелиан и Эльвэ произнесли хоть одно слово».

Предположим, что они стояли в центре поляны диаметром 30 м, скорость роста деревьев Нан Эльмота составляла 0.5 м/год, а в момент встречи высота деревьев не превышала 15 м. Через какое время количество света звезд (вроде бы Солнце и Луна тогда еще не были созданы), достигающее поляны, уменьшится вдвое? Можно считать, что звезды равномерно распределены по небесной сфере Арды.

Задача № 71

Вам дан список звезд с их небесными координатами: прямым восхождением (α) и склонением (δ), а также созвездиями, в которых они находятся. α измеряется в часах (единица измерения обозначается верхним индексом h) и изменяется в диапазоне от 0^h до 24^h (причем $24^h = 0^h$). δ измеряется в градусах и лежит в диапазоне от -90° до 90°.

Для некоторых звезд указано, что они в Петербурге в течение суток: не заходят за горизонт, заходят и восходят, не восходят над горизонтом.

Для некоторых звезд указан период, когда условия их наблюдения в Петербурге являются наилучшими (отметим, что из этого не обязательно следует, что в другие периоды года их наблюдать нельзя).

Заполните таблицу до конца и обоснуйте Ваши ответы. Лист с таблицей нужно приложить к решению.

Задача № 72

Перед вами негатив фотографии прохождения космического телескопа «Хаббл» по диску Юпитера, сделанной 30 июля 2011 года на западном побережье Австралии (автор Tom Harradine). Оцените продолжительность прохождения и частоту съемки (в кадрах в секунду), а также расстояние от фотографа до телескопа.

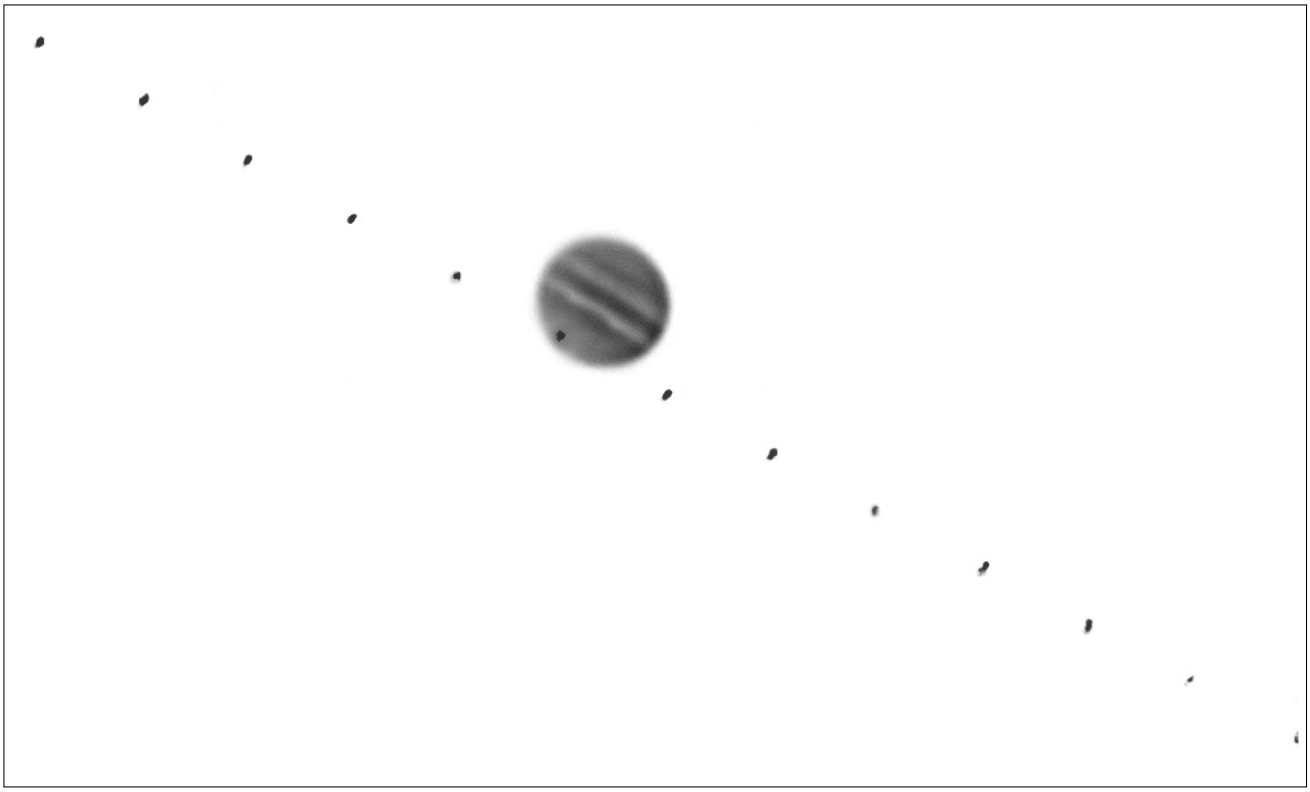
Известно, что «Хаббл» находился в поле зрения камеры (указанном рамкой на фотографии) около 1/5 секунды. Угловой размер Юпитера в этот день составлял $40''$. Можно считать, что линейная скорость телескопа «Хаббл» в момент съемки относительно фотографа составляла 7.5 км/с и была направлена под прямым углом к лучу зрения.

Задача № 73

Вы высадились на совершенно неизвестную планету, какие-либо данные о которой у Вас отсутствуют. Условия на планете более-менее пригодны для жизни, в частности, атмосфера прозрачна в оптическом диапазоне. Рельеф на планете почти отсутствует, место высадки находится на большом ровном участке,

Название звезды	Созвездие	$\alpha,^h$	$\delta,^\circ$	Лучше наблюдать	В течение суток
Адара	Большой Пес	7	-29		
Акрукс	Южный Крест	12	-63	никогда	
Алголь	Персей	3	41	начало ноября	не заходит
Альдебаран	Телец	5	17		
Альдиба	Дракон	17	66		
Альнаир	Журавль	22	-47		не восходит
Альтаир	Орел	20	9	конец июля	
Альфард	Гидра	10	-8		
Анкаа	Феникс	0	-42		не восходит
Антарес	Скорпион	16	-26	май	
Арктур	Волопас	14	19		восходит и заходит
Ахернар	Эридан	2	-57		
Бетельгейзе	Орион	6	7		восходит и заходит
Вега	Лира	19	39	июль	
Денеб	Лебедь	21	45		
Дубхе	Большая Медведица	11	62		
Заурак	Эридан	4	-14		восходит и заходит
Канопус	Киль	6	-53	никогда	не восходит
Капелла	Возничий	5	46		не заходит
Мерак	Большая Медведица	11	56		
Мирах	Андромеда	1	36		не заходит
Полярная	Малая Медведица	3	89		
Рас Альхаг	Змееносец	18	13		
Регор	Паруса	8	-47		
Регул	Лев	10	12	февраль	
Ригель Кентаврус	Центавр	15	-60	никогда	
Сириус	Большой Пес	7	-17	начало января	
Спика	Дева	13	-11		
Сухаиль	Паруса	9	-43		
Шаула	Скорпион	18	-37		не восходит
Фомальгаут	Южная Рыба	23	-29.5		восходит и заходит

К задаче № 71.



К задаче № 72.

уходящем за горизонт. Период вращения планеты вокруг оси существенно меньше периода ее обращения вокруг звезды, угол наклона плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты вокруг звезды не превышает 45°.

Вам необходимо оценить:

- продолжительность местных «солнечных» суток;
- продолжительность года;
- свою широту;
- радиус планеты;
- массу планеты.

В вашем распоряжении имеются: часы с секундомером, линейка, а также некоторый запас небольших бытовых предметов, палок и веревок. На измерения Вы можете потратить несколько суток.

Предложите методы определения перечисленных выше величин и постарайтесь оценить их возможную точность.

Задача № 74

Вам дана последовательность негативных изображений четырех экзопланет, обращающихся вокруг молодой звезды с видимой звездной величиной 6^m. Звезда на снимках экранирована, ее положение отмечено звездочкой. На изображениях приведены даты получения снимков и характерный масштаб: длина полоски соответствует 20 а.е. (20 au).

Оцените следующие величины:

- радиусы орбит планет;
- периоды обращения планет;
- массу звезды;
- температуры планет;
- температуру звезды.

Как Вы думаете, на какой из этих планет (или каких) принципиально возможно наличие жизни земного типа? Почему?

Расстояние от Солнца до планетной системы составляет 130 световых лет. Орбиты планет можно считать круговыми, плоскость орбит — лежащей перпендикулярно лучу зрения. Все объекты считать чернотельными. Ориентацию всех снимков можно считать одинаковой.

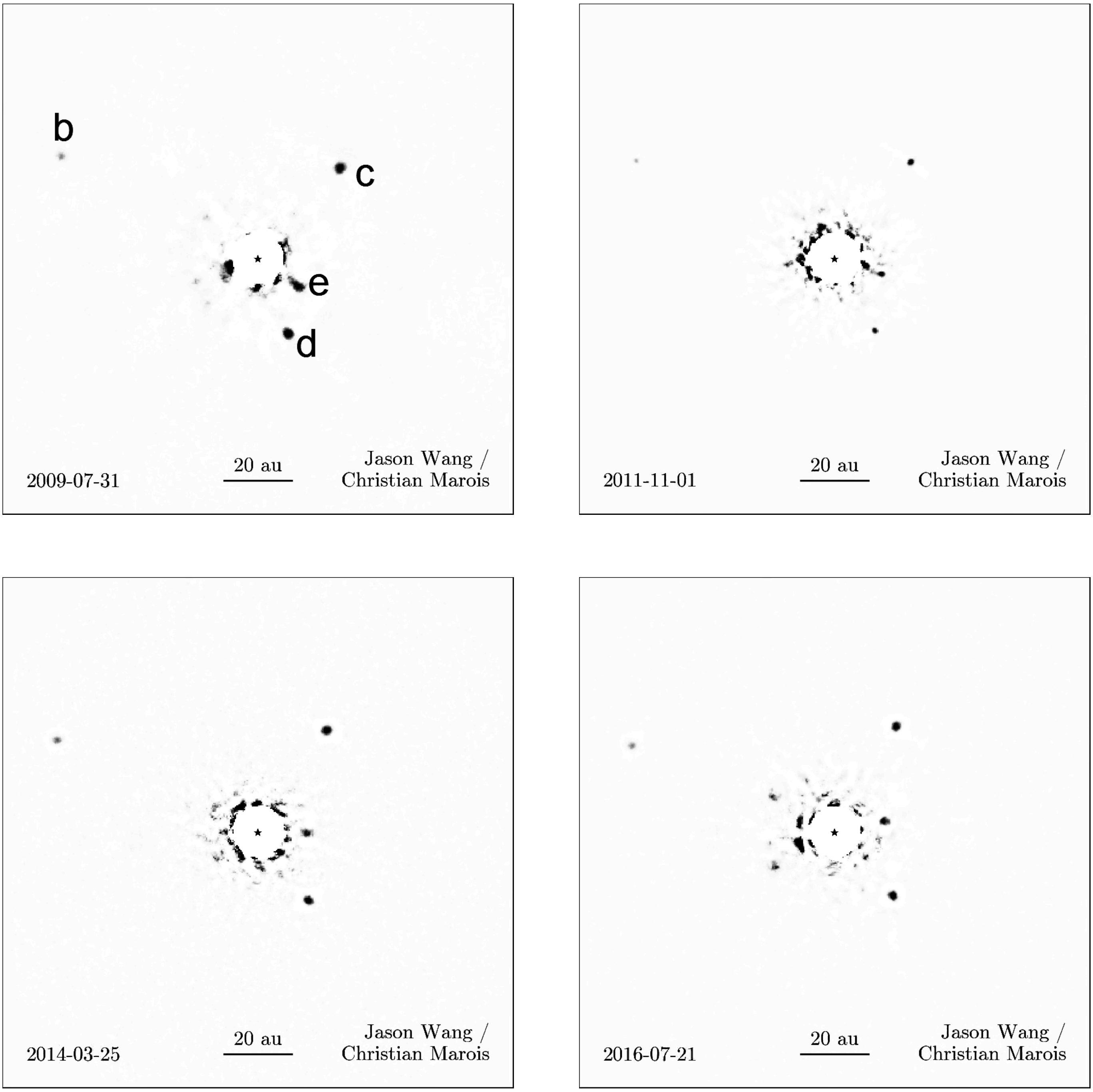
Итоговый ответ про планеты оформите в виде таблицы.

Задача № 75

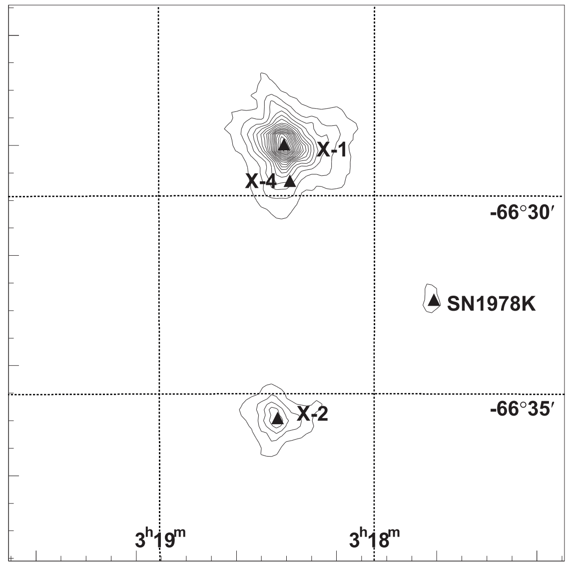
Вам дана карта, на которой отмечены источники рентгеновского излучения X-1 и X-2, находящиеся в галактике NGC 1313 в созвездии Сетки. По вертикальной оси карты отложено склонение, по горизонтальной — прямое восхождение. Кроме этого, на отдельном листе приведены спектры источников, где спектральные плотности потока принимаемого излучения выражены в условных единицах «Краба» — излучения в рентгеновском диапазоне от Крабовидной туманности, 1 Краб $= 2.6 \cdot 10^{-14}$ Вт/(м$^2 \cdot$ кэВ). Расстояние до NGC 1313 составляет 3.7 Мпк. На всякий случай упомянем, что 1 кэВ — единица измерения энергии, равная $1.6 \cdot 10^{-16}$ Дж.

Определите минимально возможные светимости этих источников. Считая, что излучение обоих источников образуется при аккреции (т.е. падении) водородной плазмы на компактный объект, оцените минимально возможные массы этих объектов. Что это за объекты? Могла ли вспышка указанной на карте сверхновой SN 1978K в той же галактике быть причиной свечения данных объектов?

Можно считать, что фотон сталкивается с электроном плазмы, если попадает в «поперечное сечение электрона» $\sigma_T = 6.6 \cdot 10^{-25}$ см^2 (оно называется томпсоновским сечением электрона), взаимодействием протонов с фотонами можно пренебречь.


b
c
e
d
2009-07-31
20 au
Jason Wang /
Christian Marois
2011-11-01
20 au
Jason Wang /
Christian Marois
2014-03-25
20 au
Jason Wang /
Christian Marois
2016-07-21
20 au
Jason Wang /
Christian Marois

К задаче № 74.



К задаче № 75.

3 Решения задач

Задача № 1

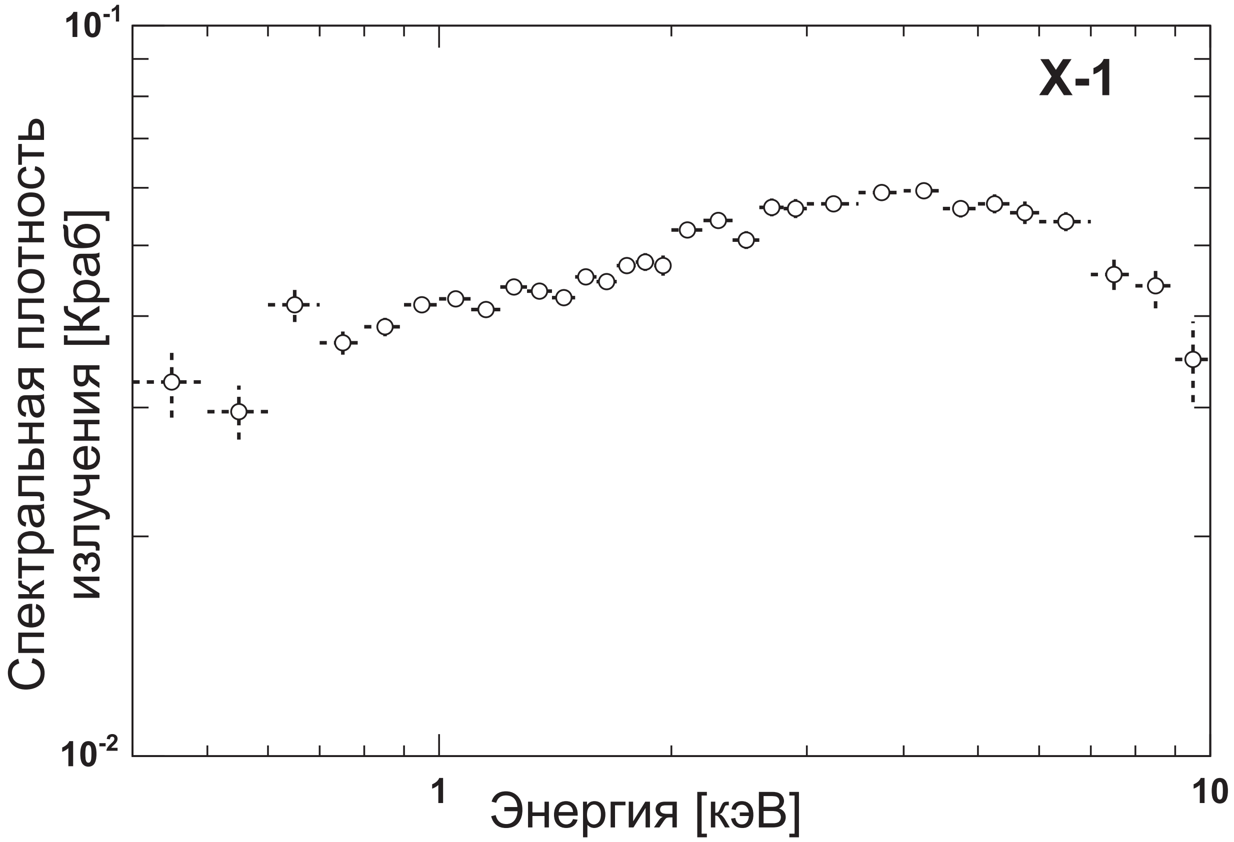
Радиус орбиты Нептуна 30 а.е, Юпитера — 5 а.е. Какая из этих планет через один земной год заметнее для земного наблюдателя сдвинется на фоне звезд? Почему?

Решение. Поскольку через год Земля вернется в исходную точку на орбите, надо понять, какая из планет сильнее переместится за одно и то же время для как бы «неподвижной» Земли. Известно, что период обращения планет вокруг Солнца быстро увеличивается с ростом радиуса орбиты, следовательно, за один год более близкая к Солнцу планета совершит большую часть своего оборота вокруг Солнца и сдвинется для земного наблюдателя на больший угол. Из заданных планет Юпитер ближе к Солнцу, следовательно, он сдвинется сильнее.

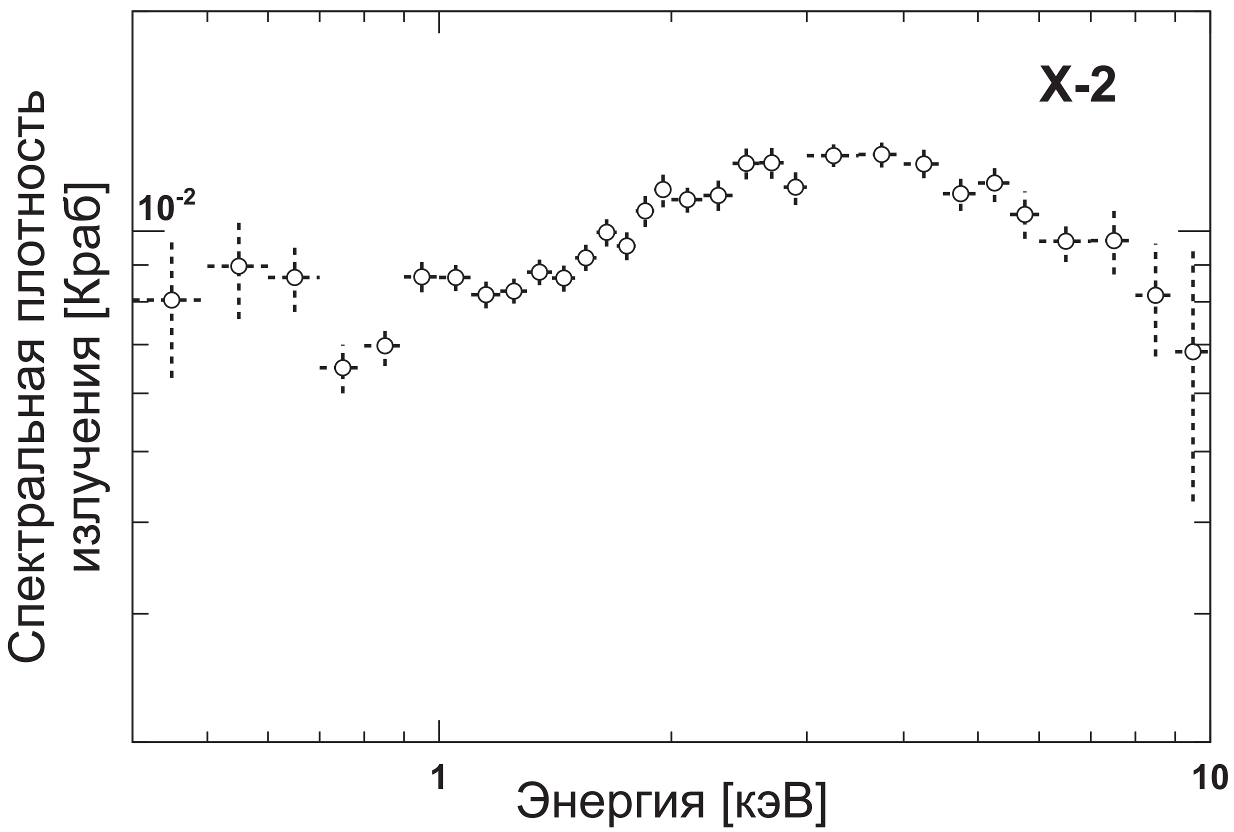
Задача № 2

Иногда в одном календарном месяце происходят сразу два полнолуния, хотя это достаточно редкое событие. Но совсем редко по два полнолуния происходят сразу в двух календарных месяцах одного года. В какие месяцы года это может произойти? Объясните свой ответ.

Решение. Чтобы два полнолуния произошли в одном календарном месяце, надо, чтобы продолжительность этого месяца была больше, чем периода между двумя последовательными полнолуниями (последний называется синодическим месяцем и составляет 29.5 суток). Тогда возможна ситуация, что одно полнолуние происходит в самом начале месяца, а второе — в самом его конце. Однако если



X-1
Спектральная плотность излучения [Краб]
10^-1
10^-2
1
10
Энергия [кэВ]



X-2
Спектральная плотность излучения [Краб]
10^-2
1
10
Энергия [кэВ]

К задаче № 75.

следующий месяц настолько короткий, что во время него полнолуние произойти не успеет, то в следующем после него месяце ситуация повторится: в течение него опять будут наблюдаться два полнолуния, одно в самом начале, другое — в конце.

Если продолжительность синодического месяца известна, то совершенно очевидно, что тем промежуточным месяцем, когда полнолуний может вообще не быть, может оказаться только февраль. Если же она неизвестна, то аналогичный вывод можно сделать, поняв, что искомый календарный месяц должен быть, во-первых, короче синодического, во-вторых, месяцы с такой продолжительностью должны встречаться достаточно редко (иначе описанная в условии ситуация не будет «совсем редкой»), т.е. месяцы с продолжительностью 30 суток, скорее всего, уже не годятся.

Ну а тогда два месяца года, в каждом из которых возможны два полнолуния — январь и март.

Задача № 3

Атмосфера звезды на 70% по массе состоит из водорода и на 30% — из гелия. Во сколько раз в атмосфере звезды больше атомов водорода, чем атомов гелия, если известно, что масса одного атома гелия в четыре раза больше, чем масса одного атома водорода?

Решение. Пусть x — число атомов водорода в атмосфере, а y — число атомов гелия. Из условия следует, что

$$\frac{x}{4\,y} = \frac{70}{30},$$

т.е. $3x = 28y$. Следовательно, отношение числа атомов водорода к числу атомов гелия $x/y = 28/3 \approx 9$.

Задача № 4

30 сентября 2016 года произошло покрытие Юпитера Луной. Определите длительность покрытия и день недели, в который произошло это событие. Свой ответ подтвердите расчетами.

Решение. Начнем с определения дня недели. Поскольку тур проходит 28 ноября в понедельник, то и последний день октября (31 октября) также был понедельником (28 делится без остатка на 7). Следовательно, 3 октября ($31 - 28 = 3$) также понедельник, а дальше можно просто посчитать дни, выяснив, что 30 сентября — пятница.

Во время покрытия Юпитер почти не перемещается на фоне звезд (поскольку находится далеко от Земли), и продолжительность покрытия определяется Луной, которая движется по Юпитеру. Покрытие может быть, как говорят, «центральным» (когда Юпитер проходит за Луной по ее диаметру) и в таком случае, очевидно, будет наиболее продолжительным. Оценим продолжительность именно центрального покрытия.

Луна совершает один полный оборот по небу на фоне звезд за 27.3 суток (эта величина называется сидерическим месяцем). Впрочем, такая точность для решения задачи не нужна, вполне достаточно считать, что это занимает календарный месяц (т.е. примерно 30 суток). Следовательно, за одни сутки она перемещается на $360^\circ/27.3 = 13^\circ$ (или 12°, если оценка сидерического периода была более грубой). При этом угловой диаметр диска Луны составляет около $0^\circ.5$, и для прохождения такого расстояния по небу ей нужно 1/26 (или 1/24) часть суток. Соответственно, продолжительность центрального покрытия составляет примерно 1 час, если же покрытие будет не центральным, то она может быть и меньше.

Задача № 5

Российские спортсмены вылетели в Бразилию для участия в Летних олимпийских играх. Из Петербурга самолет вылетел в 11 часов по московскому времени и приземлился в аэропорту Рио-де-Жанейро в 19 часов по местному времени. В обратный путь самолет вылетел в 9 часов утра по местному времени и приземлился в Петербурге в 5 часов утра по московскому времени. Оцените долготу Рио-де-Жанейро по этим данным. С какой точностью Вы можете это сделать? Учтите, что декретного времени в Бразилии нет, а перевод часов на летнее время существует.

Решение. Пусть T — время, которое требуется самолету на перелет в одну сторону, а P — то, на сколько часов местное время в Петербурге обгоняет местное время в Рио-де-Жанейро (именно обгоняет, поскольку Петербург восточнее). Тогда из условия следует, что

$$\begin{cases} 11 + T - P = 19 \\ 9 + T + P = 5 + 24 \end{cases}$$

(добавка +24 во втором уравнении связана с тем, что самолет, очевидно, прилетел в Петербург уже в следующий календарный день после вылета, если ее не ввести, результаты окажутся явно нелепыми). Решая эту систему уравнений, получаем, что $T = 14$ часов, $P = 6$ часов.

Теперь разберемся с поправками ко времени. В России есть декретное время, из-за которого все часы всегда переведены на час вперед, т.е. реальная разница часовых поясов между Петербургом и Рио-де-Жанейро составляет 5 часов. Летнее время в России не действует, т.е. соответствующих поправок нет. В Бразилии нет декретного времени, однако есть летнее. Но Бразилия расположена в Южном полушарии, и во время проведения Летней олимпиады (летом Северного полушария) в Бразилии зима. Следовательно, летнее время в Бразилии также не действует.

Осталось вспомнить (или сосчитать), что разница в 1 часовой пояс соответствует разнице долгот 15° (360/24), и, так как Петербург находится на долготе +30°, то долгота Рио-де-Жанейро должна составлять примерно $30° - 5 \cdot 15° = -45°$ или 45° западной долготы (реальное значение $-43°$).

Задача № 6

Астероид 4732 Froeschle покрыл слабую звезду TYC 0522-00906-1 в созвездии Дельфина 7 августа 2016 года в 21 час 30 минут UTC. Определите, в какой день недели это событие наблюдалось в Петербурге.

Решение. Поскольку предполагается, что все участники твердо помнят, что пишут тур 28 ноября 2016 года и это понедельник, мы воздержимся от детального описания методов выяснения, каким днем недели было 7 августа того же года. Можно, если не лень, просто нарисовать у себя в работе табель-календарь на август и три осенних месяца. Результат, который при этом должен получиться — воскресенье.

Однако это не ответ задачи, и вот почему. UTC (всемирное координированное время) — это, если не вдаваться в некоторые несущественные для нас сейчас частности, среднее солнечное время Гринвичского меридиана, от которого на Земле принято отсчитывать долготы. Петербург находится на долготе 30°, следовательно, его местное поясное время должно отличаться от гринвичского на два часа (вперед). Однако в России действует т.н. «декретное время», из-за которого часы на всей территории России сдвинуты еще на один час вперед. Все то же самое можно выразить короче, сказав, что Петербург относится к часовому поясу UTC+3.

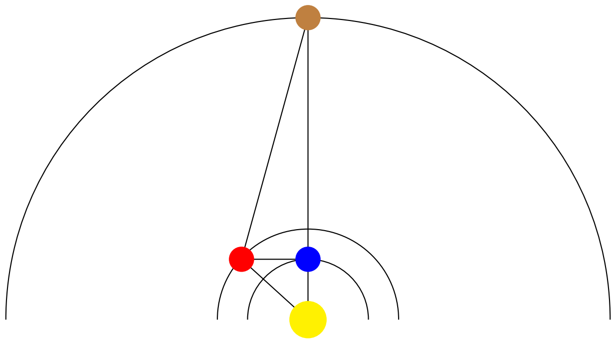
Стало быть, это означает, что в Петербурге в это время было $21^h30^m + 3^h = 24^h30^m$, т.е. 0^h30^m уже следующих суток, т.е. в Петербурге покрытие состоялось уже *8 августа*. Следовательно, ответ на вопрос задачи — понедельник.

Задача № 7

При наблюдении с Земли Марс находится в западной квадратуре, а Юпитер — в противостоянии. Марсианин одновременно отправил на Юпитер и на Землю радиосигнал с сообщением. Землянин получил сигнал в 12:00 по своим часам. Какое время показывали часы землянина, когда сигнал, отправленный на Юпитер, дошел туда? Марс расположен в 1.5 раза дальше от Солнца, чем Земля, а Юпитер — в 5.

Решение. Говорят, что планета в противостоянии, когда она находится в противоположном Солнцу направлении при наблюдении с Земли. Квадратура — это ситуация, когда угол, образованный Солнцем, Землей и планетой, прямой.

Зная это, а также тот факт, что все планеты вращаются вокруг Солнца примерно в одной и той же плоскости, изобразим описанную ситуацию на рисунке:



Тут синим цветом обозначена Земля, красным — Марс, коричневым — Юпитер, а желтым — Солнце.

Расстояние от Солнца до Земли равно (по определению) 1 астрономической единице. Тогда из рисунка очевидно, что расстояние от Юпитера до Земли — 4 а.е., а расстояния от Марса до Земли и от Марса до Юпитера можно вычислить, воспользовавшись теоремой Пифагора, они составляют $\sqrt{1.5^2 - 1^2} = 1.1$ а.е. и $\sqrt{4^2 + 1.1^2} = 4.1$ а.е. соответственно. Отметим, что без вычислений можно и обойтись: вполне достаточно построить рисунок с соблюдением масштабов и измерить нужные расстояния линейкой.

Далее нужно учесть, что радиоволны распространяются со скоростью света, после чего либо вычислить время, за которое они пройдут указанные выше расстояния, либо сразу вспомнить, что свет идет от Солнца до Земли примерно 8 минут, так что скорость радиосигналов в удобных для нас сейчас единицах составляет $(1/8)$ а.е./мин. В результате мы получим, что сигнал с Марса на Землю шел $1.1/(1/8) \approx 9$ минут, а с Марса на Юпитер — $4.1/(1/8) \approx 33$ минуты. Следовательно, на Юпитер он пришел на $33-9 = 24$ минуты позже, чем на Землю, т.е. сигнал на Юпитер пришел в $12:24$.

Задача № 8

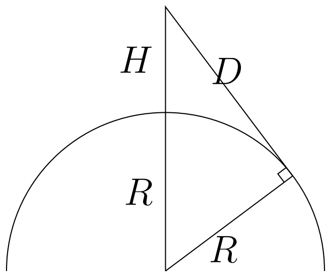
Фазой небесного тела называется отношение площади освещенной области видимого диска небесного тела к площади полного диска. При какой фазе Луны ее видимая звездная величина будет на $2^m.5$ больше, чем в полнолунии? Поверхностную яркость освещенной части диска Луны считать постоянной.

Решение. Известно, что изменение освещенности, создаваемой объектом, в 100 раз, означает изменение его блеска на 5^m. Поскольку в данном случае звездная величина поменялась на $(5/2)^m$, то это означает, что освещенность уменьшилась (по сравнению с освещенностью в полнолунии) в $\sqrt{100} = 10$ раз. Следовательно, должна быть освещена 0.1 часть диска, т.е. фаза равна 0.1.

Задача № 9

Для трансляции телепередач используются радиоволны метрового диапазона, прием которых возможен в зоне прямой видимости передатчика. Оцените максимальное расстояние, на котором возможен прием передач, транслируемых Санкт-Петербургской телебашней, высота которой составляет 312 м, если известно, что антенна телеприемника располагается на высоте 35 м.

Решение. Пусть у нас есть башня высотой H. Расстояние D, на котором ее верхушка будет видна с поверхности Земли, можно найти из следующего рисунка



Здесь R — радиус Земли. Видно, что $D^2 + R^2 = (R + H)^2$ (заметим, что наличием рельефа мы пренебрегаем, впрочем, в окрестностях Петербурга заметных гор действительно нет). Отсюда, располагая калькулятором, несложно вычислить D. Если же калькулятора нет, то можно сделать следующее. Перенесем первое слагаемое слева направо $D^2 = (R + H)^2 - R^2$ и разложим выражение справа как разность квадратов. Получим $D^2 = H\,(2R + H)$.

Поскольку высота телебашни H на много порядков меньше диаметра Земли $2R$, вторым слагаемым в скобках можно пренебречь, и тогда

$$D = \sqrt{2RH}.$$

Подставив сюда радиус Земли (около 6400 км) и высоту телебашни (при отсутствии калькулятора можно для простоты считать, что $H = 1/3$ км), получим $D \approx 63$ км.

Однако у нас есть еще и телеприемник на высоте $h = 35$ м. Впрочем, задача из-за этого становится немногим сложнее, поскольку здание с телеприемником отличается от телебашни только высотой. Для того, чтобы с вершины телебашни был виден телеприемник, нужно, чтобы одна и та же точка находилась в точности на наблюдаемом горизонте и для вершины телебашни, и для телеприемника. Соответственно, для приемника расстояние до горизонта будет равно $d = \sqrt{2Rh}$. Заметив, что $h/H \approx 9$, можно сразу же обнаружить, что $D/d \approx 3$. В результате суммарное расстояние от телебашни до приемника будет равно $D + d \approx 84$ км.

Задача № 10

Какую скорость сразу после старта необходимо развить ракете-носителю для того, чтобы отправить автоматическую межпланетную станцию к Юпитеру? Обоснуйте свой ответ.

Решение. Вопреки обыкновению, сначала напишем ответ: любую, большую нуля.

Попытки вспомнить значения $n-$ых космических скоростей или оценить их в данном случае неуместны. Их можно и нужно использовать в ситуации, когда тело уже разогнано до некоторой скорости, а дальше летит без двигателей в гравитационном поле Земли/Солнца. Однако у ракеты двигатель есть (собственно, наличие ракетного двигателя и делает ракету ракетой), поэтому если двигатель будет обеспечивать движение с какой-то (пусть даже очень малой) скоростью в нужном направлении, то рано или поздно ракета доберется до места назначения.

Задача № 11

Любитель астрономии наблюдает переменную звезду в свой телескоп. В минимуме блеска звезда имеет видимую звездную величину 10^m, причем это предел проницающей способности телескопа. Его сосед пытается наблюдать эту переменную в свой телескоп, но диаметр его телескопа в 2.5 раза меньше, поэтому сосед может увидеть переменную только тогда, когда ее блеск достигает максимума. Какую видимую звездную величину звезда имеет в максимуме блеска?

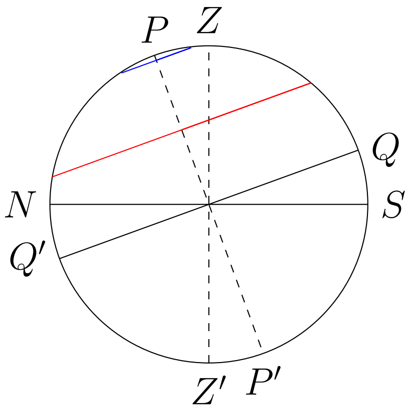
Решение. Из условия следует, что проницающая способность телескопа соседа как раз соответствует максимуму блеска звезды. При этом его телескоп в 2.5 раза меньше по диаметру и поэтому собирает в единицу времени в 2.5^2 раза меньше энергии. Таким образом, его проницающая способность на 2^m хуже, чем у первого любителя (поскольку изменение в 2.5 раза соответствует изменению на 1^m. Следовательно, в максимуме звезда имеет блеск 8^m.

Задача № 12

При наблюдении в некоторой местности высота звезды над горизонтом меняется в пределах от 32° до 64°. Определите склонение звезды и широту места наблюдения.

Решение. Начнем с выяснения того, как высоты звезд в верхней и нижней кульминации связаны с их склонением δ и широтой места наблюдения φ. В принципе, соответствующие формулы могут быть известны и использоваться как готовые, однако обычно их проще не запоминать, а выводить заново.

Построим чертеж проекции небесной сферы на плоскость небесного меридиана (для Северного полушария Земли).



Тут NS — горизонт, QQ' — экватор, ZZ' — отвесная линия, PP' — ось мира. Красным и синим обозначены суточные параллели звезд, у которых верхняя кульминация происходит к югу от зенита (соответствующую высоту обозначим $h_{\text{ВКЮ}}$)и к северу от зенита ($h_{\text{ВКС}}$) соответственно (этим двум случаям отвечают чуть различающиеся выражения для вычисления высот кульминаций, поэтому рассмотрим оба варианта). Высоту в нижней кульминации обозначим $h_{\text{НК}}$. Дуга NP — это широта места наблюдения.

Из рисунка видно, что склонение $\delta = 90° - \varphi + h_{\text{НК}}$, откуда $h_{\text{НК}} = \delta + \varphi - 90°$. Для кульминирующей к югу от зенита звезды $h_{\text{ВКЮ}} = 90° - \varphi + \delta$, для кульминирующей к северу $h_{\text{ВКС}} = \varphi + 90° - \delta$.

Теперь можно приступить к основной части решения.

Если верхняя кульминация происходит к югу от зенита, то:

$$\begin{cases} 64° = 90° - \varphi + \delta \\ 32° = \delta + \varphi - 90° \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, получаем $\delta = 48°$, $\varphi = 74°$.

Если верхняя кульминация происходит к северу от зенита, то:

$$\begin{cases} 64° = \varphi + 90° - \delta \\ 32° = \delta + \varphi - 90° \end{cases}$$

Отсюда аналогичным образом получаем второй ответ: $\delta = 74°$, $\varphi = 48°$.

Осталось заметить, что если мы находимся в Южном полушарии Земли, то все те же рассуждения также работают, однако знаки широт и склонений меняются на противоположные. Это дает еще два ответа: $\delta = -48°$ и $\varphi = -74°$, $\delta = -74°$, $\varphi = -48°$.

Задача № 13

Однажды в сентябре Марс находился в созвездии Рыб на расстоянии 1.5 а.е. от Солнца. Оцените минимальное увеличение телескопа, в который можно было бы увидеть диск планеты, если известно, что радиус Марса примерно в два раза меньше радиуса Земли.

Решение. Как известно, Солнце бывает в созвездии Рыб во время весеннего равноденствия, в марте. Следовательно, если Марс находился там же в сентябре, это означает, что он находится примерно в противостоянии и расстояние от него до Земли составляет $1.5 - 1 = 0.5$ а.е.

Дальнейшее решение предполагает, что нам нужно найти угловой размер диска Марса и выяснить, во сколько раз его требуется увеличить, чтобы результат превысил предельное угловое разрешение человеческого глаза ($1' \div 2'$). Делать это можно несколькими различными способами, но наиболее эффективный выглядит так.

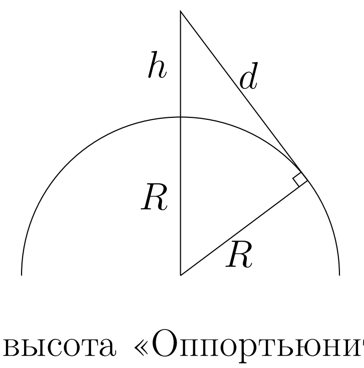
Можно вспомнить, что диаметр Солнца примерно в 100 раз больше диаметра Земли. Следовательно, он же примерно в 200 раз больше диаметра Марса. Если видимый угловой размер диска Солнца, которое мы наблюдаем с расстояния 1 а.е., составляет около $30'$, то диск Марса, который в 200 раз меньше, но зато в 2 раза ближе, должен иметь угловой размер $(30/100)' = 0'.3$. Для того, чтобы увидеть диск глазом, этот угол надо увеличить до $1'.5$ (возьмем среднюю оценку), следовательно, увеличение телескопа должно равняться 5 или более.

Задача № 14

Модуль «Скиапарелли» должен был совершить мягкую посадку на Марс в 40 км от места работы марсохода «Оппортьюнити». Мог ли «Оппортьюнити» наблюдать место посадки «Скиапарелли», если известно, что высота марсохода немного меньше среднего роста человека? Существованием рельефа на Марсе можно пренебречь.

Решение. Начнем с выяснения радиуса Марса. В условии предыдущей задачи было сказано, что он примерно в 2 раза меньше радиуса Земли, стало быть, равен примерно $R = 3.2$ тыс. км.

Предположим, что место посадки «Скиапарелли» видно с «Оппортьюнити» в точности на горизонте. Нарисуем весьма утрированную картинку:



на которой h — необходимая высота «Оппортьюнити», d — расстояние до места посадки «Скиапарелли», R — радиус Марса.

Видно, что $R^2 + d^2 = (R + h)^2$, откуда, располагая калькулятором, несложно вычислить h. Если же калькулятора нет, то придется еще немного подумать. Перенесем первое слагаемое слева направо $d^2 = (R + h)^2 - R^2$ и разложим выражение справа как разность квадратов. Получим $d^2 = h\,(2R + h)$.

Высота «Оппортьюнити» h явно на много порядков меньше диаметра Марса $2R$, так что вторым слагаемым в скобках можно с чистой совестью пренебречь, и тогда

$$h = \frac{d^2}{2R}.$$

Подставим числа (все расстояния — в километрах):

$$h = \frac{40^2}{2 \cdot 3.2 \cdot 10^3} = \frac{1}{4}\ \text{км}.$$

Это явно намного больше, чем «рост среднего человека», из чего следует сделать вывод, что увидеть место посадки «Скиапарелли» «Оппортьюнити» никак не мог.

Заметим, что задачу можно было бы решать и «наоборот» (если вы не догадались позаимствовать данное из предыдущей задачи или совсем не помните радиус Земли): оценить высоту марсохода (например, как 1.5 м) и посчитать радиус планеты, на которой «Скиапарелли» оказался бы точно на горизонте. Он окажется больше полумиллиона километров, что для любой планеты явно многовато.

Задача № 15

Входящие в состав двойной системы звезды с массами 3 и 5 масс Солнца вращаются друг вокруг друга т.к. что расстояние между ними остается постоянным и равным 2 а.е. Найдите орбитальный период такой двойной системы.

Решение. Вообще говоря, эту задачу можно решить просто как задачу на равномерное движение по окружности под действием постоянной по модулю силы, однако мы рассмотрим более простой (и ожидаемый от участников олимпиады по астрономии) вариант.

Запишем III закон Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)},$$

где P — орбитальный период, a — большая полуось орбиты системы (она же среднее расстояние между звездами), G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_{1,2}$ — массы звезд. Уже на этой стадии можно, переведя все имеющиеся данные, например, в СИ, получить ответ. Однако можно действовать разумнее и обойтись практически без вычислений.

В самом деле, применим тот же самый закон для системы Солнце–Земля, причем выразим массы в массах Солнца, период — в годах, а большую полуось — в астрономических единицах. Получим

$$\frac{1^2}{1^3} = \frac{4\pi^2}{G(1+0)}$$

(масса Земли порядка миллионных массы Солнца, так что ей вполне можно пренебречь), откуда видно, что для такой системы единиц $G = 4\pi^2$. И, поскольку все данные исходной задачи даны именно в ней, воспользуемся ей для решения. Тогда:

$$\frac{P^2}{2^3} = \frac{1}{3+5},$$

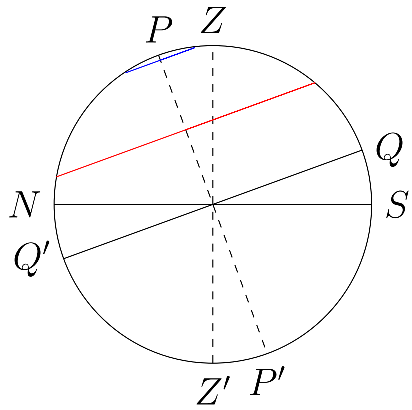
и $P = 1$ год.

Задача № 16

Высота верхней кульминации первой звезды больше высоты нижней кульминации второй звезды на 10° при наблюдении на широте $+70^\circ$. Определите разность склонений звезд.

Решение. Начнем с выяснения того, как высоты звезд в верхней и нижней кульминации связаны с их склонением δ и широтой места наблюдения φ. В принципе, соответствующие формулы могут быть известны и использоваться как готовые, однако обычно их проще не запоминать, а выводить заново.

Построим чертеж проекции небесной сферы на плоскость небесного меридиана.



Тут NS — горизонт, QQ' — экватор, ZZ' — отвесная линия, PP' — ось мира. Красным и синим обозначены суточные параллели звезд, у которых верхняя кульминация происходит к югу от зенита (соответствующую высоту обозначим $h_{\text{ВКЮ}}$)и к северу от зенита ($h_{\text{ВКС}}$) соответственно (этим двум случаям отвечают чуть различающиеся выражения для вычисления высот кульминаций, поэтому рассмотрим оба варианта). Высоту в нижней кульминации обозначим $h_{\text{НК}}$. Дуга NP — это широта места наблюдения.

Из рисунка видно, что склонение $\delta = 90^\circ - \varphi + h_{\text{НК}}$, откуда $h_{\text{НК}} = \delta + \varphi - 90^\circ$. Для кульминирующей к югу от зенита звезды $h_{\text{ВКЮ}} = 90^\circ - \varphi + \delta$, для кульминирующей к северу $h_{\text{ВКС}} = \varphi + 90^\circ - \delta$.

Теперь можно приступить к основной части решения, учитывая, что $\varphi = 70^\circ$.

Пусть первая звезда кульминирует к югу от зенита. Тогда

$$90^\circ - \varphi + \delta_1 = \delta_2 + \varphi - 90^\circ + 10^\circ,$$

откуда $\delta_2 - \delta_1 = 30^\circ$.

Если же первая звезда кульминирует к северу от зенита, то

$$\varphi + 90^\circ - \delta_1 = \delta_2 + \varphi - 90^\circ + 10^\circ,$$

откуда $\delta_1 + \delta_2 = 170^\circ$. Очевидно, информация о разности склонений непосредственно отсюда не следует, однако, поскольку склонения звезд по определению $\delta \in [-90^\circ, +90^\circ]$, то можно заключить, что разность склонений заключена в пределах от -10° до 10°.

Задача № 17

Транснептуновый объект (174567) Варда имеет спутник Ильмарэ. Оцените массы данных объектов в предположении одинаковой плотности, если известно, что Ильмарэ совершает оборот вокруг Варды за 5 суток, большая полуось орбиты составляет $4.2 \cdot 10^3$ км. Диаметр Варды оценивается в 690 км, радиус Ильмарэ составляет примерно 51% радиуса Варды.

Решение. По третьему закону Кеплера $\dfrac{P^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$, где P — период обращения, a — большая полуось, M_1 и M_2 — массы компонентов двойной системы. Тогда (вычисляя все в единицах СИ)

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 (4.2 \cdot 10^6)^3}{7 \cdot 10^{-11} \cdot (5 \cdot 8.6 \cdot 10^4)^2} \approx 2 \cdot 10^{20} \text{ кг}.$$

Пусть M_1 — масса Варды, M_2 — масса Ильмарэ. Поскольку плотность мы принимаем одинаковой у обоих объектов, то масса будет пропорциональна кубу радиуса объекта:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{R_2^3}{R_1^3}, \quad \frac{R_2^3}{R_1^3} = \left(\frac{0.51 R_1}{R_1}\right)^3 \approx \frac{1}{8}.$$

Тогда $M_1 + M_2 = \frac{9}{8} M_1 = 2 \cdot 10^{20}$ кг, откуда $M_1 = 2 \cdot 10^{20}$ кг, $M_2 = 3 \cdot 10^{19}$ кг.

Задача № 18

Оцените, во сколько раз могут отличаться наблюдаемые ширины линий в спектрах двух звезд: красного гиганта и голубого гиганта?

Решение. Основная причина уширения линий в спектрах — тепловое движение атомов в атмосферах звезд и эффект Допплера, смещающий длину волны для атома, движущегося к наблюдателю или от него. Поскольку характерные скорости движения атомов $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, а допплеровское смещение $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$, то для одной и той же длины волны получаем, что $\Delta\lambda \propto \sqrt{T}$, причем $\Delta\lambda$ — это половина ширины линии.

Осталось вспомнить характерные температуры атмосфер красных и голубых звезд. Приняв в качестве оценки 3 тыс. K и 50 тыс. K, получаем, что температуры отличаются примерно в 16 раз, следовательно, ширины линий различаются примерно в 4 раза.

Задача № 19

Газовое облако HVC 040+01–282, расположенное на расстоянии 20 кпк от Солнца, имеет массу $5.8 \cdot 10^3$ масс Солнца и видимый угловой диаметр $52'$. Предположив, что облако полностью состоит из нейтрального водорода, оцените концентрацию атомов в нем.

Решение. Вспомним, что с расстояния в 1 пк 1 астрономическая единица видна под углом в $1''$ (по определению парсека). Следовательно, с расстояния 20 кпк под тем же углом видны $2 \cdot 10^4$ а.е., что с хорошей точностью равно 0.1 пк. Следовательно, линейные размеры облака около $0.1 \cdot 52 \cdot 60 = 3 \cdot 10^2$ пк. Для оценки его объема его вполне можно считать кубическим (скорее всего, оно больше похоже на шар, но точной информации о форме у нас нет, так что проще в качестве формы выбрать ту, для которой удобнее считать объем), так что объем облака составляет $3 \cdot 10^7$ пк^3.

Осталось получить соотношение масс Солнца и атома водорода $M_\odot/m$. Если масса Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г) неизвестна, ее можно вычислить, вспомнив, что вокруг этой массы на расстоянии 1 а.е. по круговой орбите с периодом 1 год вращается Земля. Массу атома водорода (опять-таки если она неизвестна) можно вычислить, сообразив, что один моль атомарного водорода должен иметь массу примерно 1 грамм, т.е. масса атома водорода в граммах — это величина, обратная числу Авогадро и, как следствие, равная примерно $2 \cdot 10^{-24}$ г. Отсюда $M_\odot/m \approx 10^{57}$ и, следовательно, всего в облаке $6 \cdot 10^{60}$ атомов.

Первое желание — разделить число атомов на объем и сказать, что концентрация равна $2 \cdot 10^{53}$ пк$^{-3}$. Оно совершенно правильное, поскольку требуемые в ответе единицы измерения в условии не оговаривались. Однако если ответ хочется получить в чем-то более удобном, нужно перевести кубические парсеки во что-то другое (например, кубические сантиметры). Поскольку 1 пк $= 3 \cdot 10^{18}$ см, то 1 пк^3 $= 3 \cdot 10^{55}$ см^3, и концентрация оказывается порядка 10^{-2} см$^{-3}$.

Задача № 20

Плутон движется по орбите с большой полуосью 40 а.е. и эксцентриситетом 0.25. Его средний радиус равен 1.2 тыс. км, а геометрическое альбедо 0.6. Оцените диаметр объектива такого телескопа, в который Плутон мог бы хотя бы когда-нибудь наблюдать человек с нормальным зрением.

Решение. Для того, чтобы наблюдать Плутон, достаточно увидеть его как точечный объект, разрешать диск уже не требуется. Поэтому нам требуется оценить диаметр такого телескопа, при наблюдении глазом в который обеспечивалась бы проницающая способность, близкая к максимуму блеска Плутона.

Сразу же можно заметить, что наилучшими условия для наблюдения Плутона будут тогда, когда он будет находиться в районе перигелия орбиты. Соответствующее расстояние $r = a(1 - e) = 30$ а.е. (где a — большая полуось орбиты, а e — эксцентриситет). Информация о наклоне орбиты Плутона не приводится, да она и не нужна, поскольку наблюдать мы его собираемся с Земли, которая намного ближе к Солнцу, чем Плутон.

Далее мы берем светимость Солнца L и вычисляем освещенность, создаваемую Солнцем на Плутоне $E' = \frac{L}{4\pi r^2}$. Если радиус Плутона R, то в единицу времени на него попадает энергия $E'\,\pi\,R^2$, а рассеивает он $\alpha E'\,\pi\,R^2$, где α — его геометрическое альбедо. В итоге на Земле Плутон создает освещенность

$$E = \frac{\alpha E'\,\pi\,R^2}{4\pi r^2}$$

(разницей между расстоянием от Солнца до Плутона и расстоянием от Плутона до Земли мы пренебрежем).

Собирая все выкладки воедино, получаем

$$E = \frac{\alpha\,L\,\pi\,R^2}{(4\pi r^2)^2} = \frac{\alpha\,L\,R^2}{16\pi r^4}.$$

Далее нам надо каким-либо образом привязать полученный результат к проницающей способности. Это всего сделать, оценив видимую звездную величину Плутона. Заметим, что $E_0 = \frac{L}{4\pi a^2}$ — это освещенность, создаваемая Солнцем на Земле (если a — радиус орбиты Земли), а $\beta^2 = R^2/r^2$ — квадрат углового радиуса Плутона в радианах. Тогда

$$E = \alpha\,E_0\,\left(\frac{a}{r}\right)^2\,\beta^2\,\frac{1}{4},$$

и, что приятно, из пяти сомножителей только один — размерный.

Как мы уже знаем, $r = 30$ а.е. Поскольку 1 а.е. — это $1.5 \cdot 10^8$ км, то $r = 4.5 \cdot 10^9$ км. Отсюда $\beta^2 = 7 \cdot 10^{-14}$. Кроме этого, $a/r = 1/30$. Подставляя остальные множители, получаем, что

$$\frac{E}{E_0} \approx 10^{-17}.$$

Известно, что каждый один порядок разницы освещенностей соответствует разнице на $2^m.5$ и, поскольку видимая величина Солнца близка к -26.5^m, Плутон по нашей довольно грубой оценке оказывается объектом с $+16^m$. Поскольку предельная проницающая способность невооруженного глаза $+6^m$, площадь объектива должна быть примерно в 10^4 раз больше площади зрачка, диаметр объектива должен быть в 10^2 раз больше диаметра зрачка глаза, т.е. около 0.5 м. Более аккуратные вычисления должны дать несколько меньший результат.

Задача № 21

Как долго длятся на Луне солнечные сутки?

Решение. Смена лунных фаз происходит за 29.5 суток. Таким образом, Луна делает один оборот вокруг своей оси относительно Солнца за 29.5 суток. Это и будет продолжительность солнечных суток на Луне.

Задача № 22

Один астролог утверждал, что 29 февраля 2200 года, когда Меркурий будет ясно виден на полуночном небе в созвездии Льва, произойдет конец света. Похоже, что нашим потомкам можно этого не бояться. Почему? Найдите все очевидные астрономические ошибки в этом высказывании.

Решение.

- В том календаре, по которому мы живем сейчас, целые года столетий, в которых число столетий не делится на 4, високосными не являются, т.е. дня с датой 29 февраля 2200 года не будет.
- Меркурий не отходит далеко от Солнца на небе Земли, так что в полночь в принципе не может наблюдаться.
- В конце февраля Солнце располагается в созвездии Водолея, так что Меркурий может находиться в том же созвездии, либо в каком-то соседнем, но никак не созвездии Льва, в котором Солнце бывает летом.

Задача № 23

Известно, что слабые небесные объекты лучше всего наблюдать в полночь в то время года, когда они находятся в противоположной Солнцу части неба.

Ну и, естественно, тогда, когда на небе нет Луны. Однажды в сентябре в период, благоприятный для наблюдения своей любимой туманности, любитель астрономии вышел во двор и увидел строго на юге Луну в первой четверти («растущую»). Сколько часов можно еще поспать любителю астрономии до момента, наилучшего для наблюдений туманности? Стоит ли ему огорчаться из-за присутствия Луны на небе? Ответ поясните.

Решение. Если Луна в первой четверти располагается точно на юге, то в этот момент Солнце находится на горизонте, готовясь зайти за него. Значит любимая туманность любителя астрономии в этот момент также располагается вблизи горизонта, но при этом восходит из-под него. Небо совершает полный оборот за 24 часа. В сентябре Солнце проводит над и под горизонтом примерно по половине суток. Следовательно, от момента его захода до полуночи (самого низкого положения Солнца под горизонтом) должно пройти около 6 часов (четверть суток). За это время Луна также пройдет четверть своего пути по небу и окажется на горизонте, за который довольно быстро зайдет и не будет мешать наблюдениям.

Задача № 24

Когда — в ноябре или в феврале — Солнце может подняться на максимальную высоту над горизонтом в Петербурге? Объясните свой ответ.

Решение. Как известно, 21 или 22 декабря происходит явление зимнего солнцестояния, когда полуденная высота Солнца является минимальной. До и после дня зимнего солнцестояния полуденная высота Солнца убывает и, соответственно, возрастает примерно симметрично относительно момента солнцестояния. Поэтому максимальная высота Солнца может быть достигнута в тот день, который отстоит дальше всего от момента солнцестояния. Легко видеть, что таким днем будет последний день февраля (отстоящий от зимнего солнцестояния на 68–70 суток), а не первый день ноября (отстоящий от зимнего солнцестояния на 50–51 сутки). Ответ — в феврале.

Задача № 25

Ровно в полночь в небо Земли «выстрелили» мощным лазером. Через год Земля снова оказалась в той же точке своей орбиты, где провели эксперимент с лазером. Как далеко от Земли находился в это время световой сигнал, испущенный лазером?

Решение. Те, кто внимательно прочел условия задачи, дадут ответ сразу — за один год луч света проходит расстояние, равное 1 световому году! Это и будет правильный ответ. Если Вы хотите вычислить это расстояние в каких-либо метрических единицах, то надо вспомнить, что скорость света равна примерно 300 000 км/с, а в году примерно 30 млн. секунд. Таким образом, за год свет пройдет расстояние, равное примерно 10 000 000 000, или 10 триллионам км. Это также правильный ответ.

Задача № 26

Как известно, географические полюса немного перемещаются по поверхности Земли, и их положение в некоторый момент известно с погрешностью $0''.002$. Какому расстоянию (в единицах длины) на поверхности Земли соответствует эта погрешность?

Решение. Известно, что одна морская миля 1852.3 метра соответствует $1'$ дуги меридиана (а если не известно, то это легко показать, достаточно поделить длину окружности меридиана $4 \cdot 10^7$ м на количество угловых минут в окружности $360 \cdot 60 = 21600'$). $0''.002$ меньше $1'$ в 30 000 раз ($60''/0''.002 = 30\,000$). Следовательно, в метрической системе точность измерений также возрастет в 30 000 раз, т.е. $0''.002$ будет соответствовать $1852.3/30\,000 \approx 0.06\,\text{м} = 6\,\text{см}$.

Задача № 27

Первая планета оказывается в противостоянии чаще, чем вторая. Какая из них расположена дальше от Солнца?

Решение. То, что первая планета чаще бывает в противостоянии, чем вторая, означает, что синодический период (промежуток времени между противостояниями) первой планеты S_1 меньше, чем второй S_2, т.е. $S_1 < S_2$. Синодический период S связан с сидерическим периодом (периодом обращения) T следующим образом: $1 - 1/T = 1/S$ (для внешней планеты, наблюдаемой с Земли, если все периоды измеряются в годах). В свою очередь, T определяется большой полуосью орбиты планеты a, причем $T^2 \propto a^3$, так что чем больше сидерический период, тем дальше планета от Солнца.

$S_1 < S_2$, следовательно, $1/S_1 > 1/S_2$, поэтому $1 - 1/T_1 > 1 - 1/T_2$, откуда следует, что $1/T_1 < 1/T_2$ и, наконец, $T_1 > T_2$. Таким образом, первая планета находится дальше от Солнца, чем вторая.

Задача № 28

В конце октября на небе, рядом с тонким серпом старой Луны, можно было невооруженным глазом наблюдать планету. В какое время суток наблюдалась эта картина? Что это могла быть за планета? Как изменится последний ответ, если известно, что планета была яркой? Ответы обоснуйте.

Решение. Старый тонкий серп Луны виден незадолго до восхода Солнца. Значит эта картина наблюдалась утром. Серп тонкий, следовательно, это происходило вблизи новолуния, так что планета была вблизи соединения с Солнцем, и в таких условиях принципиально возможно увидеть все планеты, которые вообще можно увидеть невооруженным глазом: Меркурий, Венеру, Марс, Юпитер и Сатурн. Однако Меркурий и Сатурн яркими не бывают, а яркие вблизи противостояния Юпитер и Марс вблизи соединения сильно уступают в блеске Венере. Следовательно, если планета была яркой, то это Венера.

Задача № 29

Почему телевизионные спутниковые антенны-«тарелки» в Петербурге всегда ориентированы примерно в южном направлении?

Решение. «Тарелка» всегда должна быть направлена на спутник. Поскольку она закреплена, это означает, что спутник по отношению к ней должен всегда находиться в одной и той же точке неба. Это возможно, если период обращения спутника по орбите равен периоду осевого вращения Земли (и направления вращения совпадают). Однако необходимо выполнить еще два условия — орбита должна быть круговой и лежать в плоскости земного экватора, иначе спутник будет периодически перемещаться либо по линии восток–запад (при эллиптической орбите), либо по линии север–юг (если орбита наклонена к экватору). Орбита, удовлетворяющая всем этим условиям, существует и называется геостационарной.

Таким образом, «тарелка» должна быть наведена на какую-то точку геостационарной орбиты, где находится нужный спутник-ретранслятор. Однако, поскольку все эти точки расположены над экватором Земли, в северном полушарии (где находится Петербург) все такие точки будут располагаться в южном направлении.

Задача № 30

При моделировании диска Галактики в рамках задачи N тел рассматривается система из 5×10^6 частиц. Какую массу (в кг) и объем (в пк^3) представляет такая «частица», если масса диска Галактики равна $\sim 5 \cdot 10^{10}$ масс Солнца и средняя плотность вещества в окрестностях Солнца составляет 0.1 массы Солнца в кубическом парсеке?

Решение. Масса частицы равна

$$M = \frac{5 \cdot 10^{10} M_\odot}{5 \cdot 10^6} = 10^4 M_\odot = 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг} = 2 \cdot 10^{34}\ \text{кг}.$$

Объем, приходящийся на такую массу, равен $V = \dfrac{M}{\rho} = \dfrac{10^4 M_\odot}{0.1 M_\odot/\text{пк}^3} = 10^5\ \text{пк}^3$.

Задача № 31

Комета пролетела мимо Солнца по орбите с перигелийным расстоянием 0.5 а.е. С какой минимальной скоростью она должна была двигаться относительно Солнца в момент прохождения перигелия, чтобы больше никогда не вернуться к Солнцу?

Решение. Чтобы комета не вернулась, необходимо, чтобы она, пролетев мимо Солнца, ушла из Солнечной системы. Для этого скорость кометы в перигелии орбиты должна быть не меньше, чем параболическая (она же 2-я космическая) для соответствующего расстояния.

Оценить параболическую скорость можно разными способами, наиболее простой из них следующий. Известно, что скорость движения по круговой орбите (или 1-я космическая) $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{G\,M/r}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра (в нашем случае Солнца), r — радиус орбиты. Для дальнейшего существенно, что $v_{\mathrm{I}} \propto r^{-1/2}$. Параболическая скорость связана с круговой на том же расстоянии как $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2}\,v_{\mathrm{I}}$.

Орбитальная скорость Земли (круговая для $r = 1$ а.е.) примерно равна 30 км/с. Поэтому круговая скорость на расстоянии 0.5 а.е. от Солнца будет в $\sqrt{2}$ раз больше, а параболическая там же — еще в $\sqrt{2}$ раз больше. Следовательно, минимально необходимая скорость кометы составит $30 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 60$ км/с.

Задача № 32

Оцените среднюю плотность Миранды, если ее средний радиус составляет 235 км, а время падения с обрыва высотой 20 км на ее поверхности составляет 12 минут.

Решение. Поскольку высота, с которой происходит падение, на порядок меньше радиуса Миранды, будем считать движение при падении равноускоренным. Тогда высота $h = gt^2/2$, где t — время падения, g — ускорение свободного падения. Отсюда $g \approx 0.08$ м/с^2 и, поскольку форма Миранды слабо отличается от шара, $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R \rho$, откуда получаем плотность $\rho = 1.2$ г/см^3.

Задача № 33

Видно ли невооруженным глазом звездное скопление, состоящее из 10 тысяч одинаковых звезд, звездная величина каждой из которых равна $+15^m$?

Решение. Известно, что при изменении блеска в 100 раз, звездная величина меняется на 5^m. Следовательно, скопление, которое в 10 тысяч (т.е. в 100×100 раз) ярче отдельной звезды, имеет звездную величину на 10^m меньше, чем каждая его звезда. Тогда общая звездная величина такого скопления равна $15^m - 10^m = 5^m$. Так как предельная звездная величина, доступная невооруженному глазу, равна 6^m, то скопление будет видно невооруженным глазом, как слабая звездочка.

Можно также решить задачу «в лоб«, используя формулу для разности звездных величин: $m_{\text{ск}} - m_{\text{зв}} = -2.5 \lg(E_{\text{ск}}/E_{\text{зв}})$.

Задача № 34

Однажды, находясь в Калькутте, любитель астрономии увидел, что он солнечным днем... не отбрасывает тени! Назовите с точностью до месяца, когда это могло быть, если известно, что широта Калькутты $22°50'$ с.ш.

Решение. Предположение о том, что любитель астрономии является вампиром или привидением, мы рассматривать не будем, так что остается предположить, что в этот момент Солнце находилось в зените. Посмотрев на широту Калькутты, можно обнаружить, что город располагается почти на северном тропике (широта которого $23°26'$ с.ш.), т.е. полуденное Солнце в нем может оказаться в зените практически только в день летнего солнцестояния. Следовательно, описанная ситуация случилась в июне.

Задача № 35

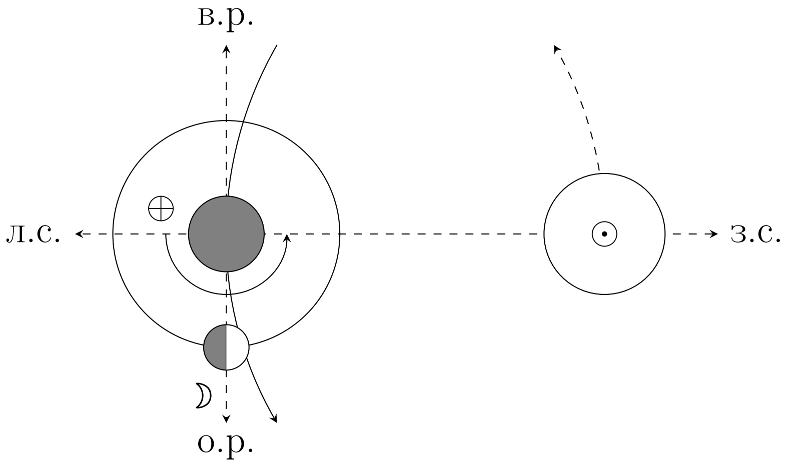
Поле зрения телескопа составляет $2°.6 \times 2°.6$. Какое минимальное количество снимков потребуется сделать на данном телескопе, чтобы полностью сфотографировать скопление галактик в созвездии Волосы Вероники, если данное скопление расположено на расстоянии около 99 Мпк и имеет диаметр примерно 17 Мпк?

Решение. Сначала определим угловые размеры скопления. Его Угловой диаметр равен $d = 2 \operatorname{arctg}(D/2r) \approx D/r = 0.17$ радиан или $10°$. Для оценки количества снимков представим, что исследуемая область скопления представляет квадрат со стороной $10°$. Снимки также будем располагать вдоль сторон квадрата. Тогда количество снимков равно $N = n \cdot n$, где n — количество снимков, умещающихся вдоль стороны квадрата, округленное в большую сторону. $n = [d/2°.6] + 1 = 4$, поэтому всего потребуется $4 \cdot 4 = 16$ снимков.

Задача № 36

Вычислите, во сколько (с точностью до часа) взойдет Луна над горизонтом 21 декабря в Петербурге, если известно, что в этот день она будет иметь фазу последней четверти? Наклоном орбиты Луны к эклиптике и уравнением времени пренебречь.

Решение. 21 декабря Солнце находится вблизи точки зимнего солнцестояния (з.с.) и «движется среди звезд» в сторону точки весеннего равноденствия (в.р.). Так как Луна имеет фазу последней четверти, то при этом она находится в точке осеннего равноденствия (о.р.), то есть на экваторе к западу от Солнца (наклоном лунной орбиты пренебрегаем). Следовательно, Луна взойдет около истинной солнечной полуночи. Однако гражданское время, по которому мы живем, сдвинуто относительно солнечного времени на 1 час вперед. Следовательно, по гражданскому времени Луна взойдет около часа ночи.



Задача № 37

Карта рельефа Венеры строилась методом радиолокации. Наблюдения проводились с Земли в тот момент, когда Венера была ближе всего к Земле. Перепады высот на поверхности Венеры измерялись с погрешностью 1 м. Оцените относительную точность часов, которые необходимо использовать при таких наблюдениях.

Решение. В момент, когда Венера ближе всего к Земле, она находится от Земли на расстоянии 0.3 а.е. Для того, чтобы при радиолокации с такого расстояния можно было заметить изменение в расстоянии, равное 1 м, требуется, чтобы относительная точность часов равнялась 1 м / 0.3 а.е. (при радиолокации сигнал должен дойти от Земли до Венеры и обратно, т.е. пройти удвоенное расстояние между планетами, однако и расстояние, соответствующее перепадам рельефа, сигнал также проходит дважды). Так как 0.3 а.е. $\approx 4.5 \cdot 10^{10}$ м, получаем, что относительная точность часов должна была быть не хуже $2 \cdot 10^{-11}$.

Задача № 38

Альтаир (α Орла) и Акрукс (α Южного Креста) имеют одинаковые видимые звездные величины в оптическом диапазоне. Какая из этих звезд будет ярче при наблюдении в ультрафиолетовой области спектра, если эффективная температура Альтаира равна 8000 K, а Акрукса — 28000 K?

Решение. Известно, что чем больше эффективная температура звезды, тем в более коротковолновую область спектра смещается максимум излучения (по закону смещения Вина). Излучение ультрафиолетового диапазона (УФ) имеет меньшую длину волны, чем оптического. Следовательно, более горячая звезда — Акрукс — будет ярче в УФ, чем менее горячая — Альтаир.

Задача № 39

Средняя плотность вещества звезды — красного гиганта составляет $1.5 \cdot 10^{-7}$ г/см^3. Оцените минимально возможный период осевого вращения такой звезды.

Решение. Минимально возможный период вращения можно получить, считая, что в этом случае скорость движения частиц на экваторе звезды совпадает с первой космической скоростью (в самом деле, если скорость движения частиц больше, то они просто улетят с поверхности).

Поскольку скорость движения по круговой орбите

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(M — масса тела, R — его радиус, G — гравитационная постоянная), то минимальный возможный период можно выразить как

$$P = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM/R}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

где ρ — средняя плотность тела ($\rho = \frac{3}{4\pi} M/R^3$). Подставляя числовые данные, получаем ответ — около $3 \cdot 10^7$ с, т.е. примерно один год.

Задача № 40

Карликовая галактика Чаша 2, открытая в январе 2016 г, расположена на расстоянии 118 кпк от Солнца и имеет абсолютную звездную величину -8.2^m. Во сколько раз суммарная светимость данной галактики меньше светимости принадлежащего Млечному Пути шарового скопления Омега Центавра, расположенного на расстоянии $d = 18300$ св. лет и имеющего видимую звездную величину $m_c = +3.9^m$?

Решение. Определим абсолютную звездную величину скопления:

$$M_c = m_c + 5 - 5\lg(d/3.26) \approx -10^m.$$

По формуле Погсона для абсолютных звездных величин $M_c - M_г = 2.5 \lg \dfrac{L_г}{L_c}$, $L_г = L_c \cdot 10^{0.4(M_c - M_г)} \approx L_c \cdot 0.2$.

Задача № 41

Источник гамма-всплеска GRB 060218, зарегистрированного на Земле в 2006 году, имеет красное смещение 0.0334. Какой геологический период был на Земле в тот момент, когда излучение гамма-всплеска было испущено источником?

Решение. $Hr = cz$, где r — расстояние до источника всплеска, H — постоянная Хаббла, c — скорость света, z — красное смещение. Подставляя данные и выражая результат в световых годах, получаем $r \approx 4.8 \cdot 10^8$ св. лет, т.е. ордовикский период.

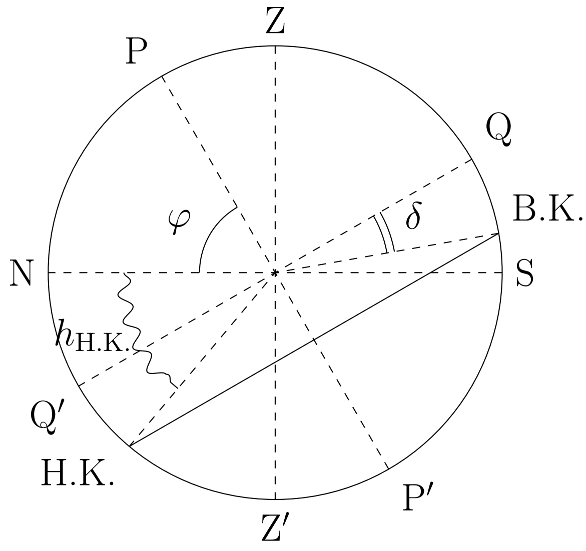
Следует отметить, что подобная оценка имеет право на существование постольку, поскольку красное смещение $z \ll 1$. В этом случае изменением постоянной Хаббла со временем можно пренебречь, а космологическое красное смещение оказывается очень похожим на смещение, связанное с классическим эффектом Допплера. Однако сходство только приближенное, поэтому использование в промежуточных выкладках «скорости удаления гамма-всплеска», вычисленной по формуле релятивистского эффекта Допплера (якобы для большей точности), является не только бессмысленным усложнением решения, но и принципиально ошибочно.

Заметим также, что полученный ответ зависит от принятого значения постоянной Хаббла (выше использовалось 70 км/с/Мпк), при использовании других современных оценок постоянной Хаббла можно получить также кембрийский период.

Задача № 42

При наблюдении звезды в Пулковской обсерватории выяснилось, что ее высота в верхней кульминации в два раза меньше по абсолютному значению, чем в нижней кульминации. Каково склонение звезды?

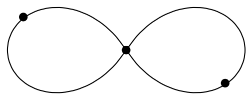
Решение. Если и верхняя, и нижняя кульминации происходили над горизонтом, то высота верхней кульминации не может быть меньше, чем высота нижней. Если обе кульминации происходили под горизонтом, то условие на соотношение высот можно выполнить, но такую звезду невозможно наблюдать. Следовательно, остается один вариант: звезда в двух кульминациях находится по разные стороны горизонта. Тогда, так как речь идет об абсолютных величинах значения высоты, то высота звезды в нижней кульминации может быть по модулю больше, чем в верхней кульминации. При этом, чтобы выполнялось указанное условие, необходимо, чтобы склонение звезды было отрицательным. Зная, что широта Пулковской обсерватории $\varphi = 60°$, и построив рисунок, можно легко увидеть, что склонение звезды $\delta = -10°$.



Отметим, что использование более точных данных о широте Пулковской обсерватории лишено смысла. Безусловно, широту обсерватории можно указать с точностью по крайней мере до угловой минуты ($59°46'$), однако для вычисления с той же точностью наблюдаемой высоты звезды необходимо учитывать атмосферную рефракцию, данные о которой в условии задачи отсутствуют.

Задача № 43

Астрономы открыли необычную тройную звездную систему, состоящую из трех одинаковых звезд, движущихся друг за другом по орбите, изображенной на рисунке. Чему равно максимально возможное изменение видимой звездной величины этой системы для внешнего наблюдателя?



Решение. В тот момент, когда наблюдатель видит все три звезды, блеск системы, очевидно, будет максимальным. Но, в силу симметрии системы, все три звезды в ней могут находиться на одной прямой (этот случай как раз изображен на рисунке). Если наблюдатель окажется на той же прямой, он будет видеть только одну звезду. Следовательно, блеск может изменяться в три раза. Тогда $E_1/E_2 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; 3 = (2.512)^{\Delta m} \;\; \Rightarrow \;\; \Delta m \approx 1^m.2$

Задача № 44

Спиральная галактика, видимая с ребра, излучает в радиодиапазоне в линии нейтрального водорода с длиной волны 21 см. Оцените ширину этой линии, если известно, что максимальная скорость вращения галактики составляет $3 \cdot 10^2$ км/с.

Решение. Водород вращается вместе с галактикой, поэтому по крайней мере некоторые излучающие области движутся с максимальной скоростью по отношению к центру галактики. Тогда, если излучение, приходящее из центральных областей галактики, имеет длину волны λ, то движущиеся со скоростью v области будут излучать на длине волны, отличающейся от λ на величину $\Delta\lambda$ из-за эффекта Допплера. Скорости малы, поэтому можно воспользоваться формулой классического эффекта Допплера

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

где c — скорость света. Поскольку $v/c = 10^{-3}$, то $\Delta\lambda = 10^{-3} \cdot 21\,\text{см} \approx 0.2$ мм. Смещение длины волны из-за вращения галактики должно происходить как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, поэтому общая ширина линии будет составлять $2\,\Delta\lambda = 0.4$ мм.

Заметим, что исходные данные в задаче (в первую очередь максимальная скорость вращения галактики) приведены с очень низкой точностью: подобная запись, как правило, означает, что скорость составляет $(3 \pm 1) \cdot 10^2$ км/с. Отсюда очевидно следует, что и полученный результат имеет смысл получать с такой же характерной точностью — с одной, максимум, двумя значащими цифрами. Поэтому ответы вроде 0.420291 мм, хотя их и можно получить при вычислениях, бессмысленно-«точны», подобное неоправданное завышение точности является ошибкой.

Задача № 45

У двойной звезды NGC 3603–A1 компоненты имеют примерно одинаковые массы и движутся по круговой орбите с периодом 3.77 дней и большой полуосью 0.283 а.е. Оценка суммы масс звезд при рождении равна $\approx 260 M_\odot$. Возраст системы оценивается в 1.5 млн лет. Сколько массы (в массах Земли) в среднем теряют звезды за 1 с?

Решение. Сумма масс (текущая) компонент оценивается из III закона Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{M_1 + M_2},$$

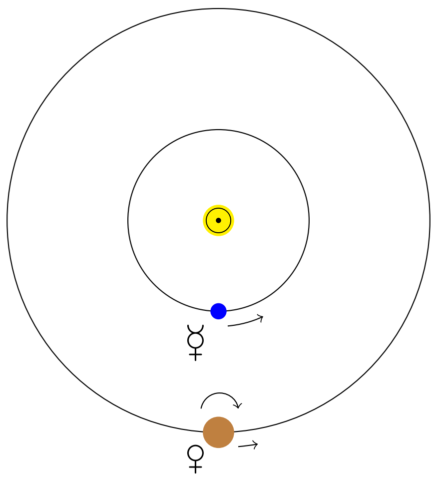
где орбитальный период P выражен в годах, большая полуось a — в а.е., а массы компонент M_1 и M_2 — в массах Солнца $M_\odot$. Отсюда $M_1 + M_2 \approx 210 M_\odot$. За 1.5 млн. лет звезды потеряли около $50 M_\odot = 5 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{30}$ кг $= 10^{32}$ кг. Темп потери массы составляет $10^{32}/(1.5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^7) = 2 \cdot 10^{18}$ кг/с $= 3 \cdot 10^{-7}$ масс Земли за секунду.

Задача № 46

Житель Северного полушария Венеры наблюдает прохождение Меркурия по диску Солнца. В какую сторону будет двигаться Меркурий по диску? Почему?

Решение. Все планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса. Так как наблюдатель располагается в Северном полушарии Венеры, то планеты для него будут двигаться слева направо. Вследствие суточного вращения Венеры как Солнце, так и Меркурий движутся по небу практически с одинаковой скоростью, так что движение Меркурия по диску Солнца будет происходить только за счет движения планет по их орбитам вокруг Солнца. Меркурий движется вокруг Солнца быстрее, чем Венера, так что в момент прохождения он будет ее «обгонять». Следовательно, двигаться по диску Солнца он будет в том же направлении, в котором планеты движутся по орбитам, т.е. слева направо.

Известно, что Венера, в отличие Земли, вокруг своей оси вращается в направлении, противоположном направлению ее движения по орбите вокруг Солнца, т.е. по часовой стрелке, если смотреть с Северного полушария. Небо на Венере при этом вращается, в отличие от неба на Земле, против часовой стрелки, т.е. справа налево, если смотреть на Солнце в северном полушарии. Меркурий, таким образом, пойдет по диску Солнца в направлении, противоположном вращению неба.



Если же задаться вопросом, на восток или на запад пойдет Меркурий по диску Солнца для наблюдателя в Северном полушарии Венеры, то ответ на него упрется в определение востока и запада для Венеры.

Если определять восток на Венере как то направление, откуда Солнце встает, а запад — куда заходит, то Венера, как и Земля, вращается с запада на восток. Небо на Венере при этом вращается с востока на запад. Меркурий, в таком случае, пойдет по диску Солнца с запада на восток.

Если же считать, что направления на восток и на запад на Венере совпадают с таковыми для всей Солнечной системы, т.е. с земными (как, например, делается в компьютерных планетариях), то Венера будет вращаться с востока на запад, а ее небо — с запада на восток. В этом случае Меркурий пойдет с востока на запад.

Задача № 47

«Суперлунием» иногда называется ситуация, когда Луна во время полнолуния оказывается ближе всего к Земле. В некоторый момент Луна в момент новолуния оказалась в апогее. Будет ли ближайшее полнолуние «суперлунием»? Поясните свой ответ.

Решение. Апогей — самая далекая точка эллиптической орбиты Луны от Земли. Так как эллипс — фигура симметричная, то после апогея Луна придет в перигей, т.е. наиболее близкую к Земле точку ее орбиты, через половину истинного периода обращения Луны вокруг Земли, так называемого сидерического месяца[1].

Полнолуние же после новолуния наступит через половину периода смены фаз Луны, так называемого синодического месяца, который примерно на 2 суток больше сидерического.

Следовательно, дойдя до перигея Луна еще не достигнет полнолуния, а полнолуние случится тогда, когда Луна уже уйдет из ближайшей к Земле точки орбиты. Конечно, Луна при этом тоже будет выглядеть довольно большой на небе, но «суперлуния» не будет.

Задача № 48

Некоторые особо запасливые люди сохраняют старые календари для повторного их использования, когда распределение дат дней в году по дням недели снова повторится. Как Вы думаете, каким может быть максимально возможный срок хранения календаря до первого повторного использования? Определите год из XXI века, календарь которого для повторного использования придется хранить настолько долго, если известно, что 1 января этого года — суббота.

Решение. Распределение дат по дням недели в некотором году полностью задается двумя параметрами: днем недели, соответствующим 1 января, и тем, является год високосным или невисокосным.

Очевидно, что и для високосных, и для невисокосных годов повторение дня недели 1 января случится самое позднее на восьмой по счету год того же типа от текущего: семь предыдущих годов могут начинаться в разные дни недели, но в восьмой какой-то из этих дней вынужден будет повториться. Следовательно, если искомый год является невисокосным, то самое позднее через 10 лет календарь обязательно повторится (между идущими подряд 8 невисокосными годами могут оказаться еще 3 високосных года). Если же искомый год — високосный, то повторение произойдет не позже, чем через $7 \times 4 = 28$ лет.

[1]Строго говоря, это не совсем т.к. Период между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей ее орбиты называется аномалистическим месяцем, и он длиннее сидерического примерно на 5 с половиной часов, однако в данном случае нас интересует продолжительность периода с точностью до суток, поэтому такой разницей можно пренебречь.

Заметим, кстати, что и не раньше: если бы какой-то день недели 1 января повторился бы быстрее, то и дальше все календари повторялись бы с меньшим, чем 28-летний, циклом, а это означало бы, например, что високосные годы не могут начинаться с некоторых дней недели.

Является ли это максимально возможным сроком? Наверное, нет — хотя бы потому, что ответ на второй вопрос задачи в таком случае явно не будет единственным: в 100 лет периоды по 28 лет укладываются три раза, так что подходящих ответов будет как минимум три (а то и четыре).

Для увеличения срока ожидания надо вспомнить об особенностях устройства григорианского календаря, в котором 2100 год високосным не является. Тогда восьмой по счету високосный год после некоторого наступит не через 28 лет, а через 32 и, кроме этого, порядок чередования дней недели 1 января за счет невисокосности 2100 года собьется, в результате чего повторение календаря, возможно, удастся еще немного оттянуть. Следовательно, нам нужно найти какой-то високосный год, находящийся в последней трети XXI века.

Дальше действуем просто перебором. Известно, что каждый очередной невисокосный год день недели, соответствующий 1 января, сдвигается на единицу вперед, а в високосном году сдвиг происходит на два дня недели. Следовательно, в обычной ситуации день недели, с которого начинается следующий високосный год, сдвигается на пять дней вперед (или на два — назад, что одно и то же) по сравнению с предыдущим. 2017 год, как многие помнят, начался в воскресенье, следовательно, 2016 — в пятницу. Следовательно, $2016 + 28 + 28 = 2072$ год также начался в пятницу. Составим табличку дней недели первого января високосных годов последней трети XXI века, двигаясь от найденного нами 2072 года назад и вперед:

Год	День недели
2068	воскресенье
2072	пятница
2076	среда
2080	понедельник
2084	суббота
2088	четверг
2092	вторник
2096	воскресенье

Видно, что 2068 год уже можно было бы и не учитывать (через 28 лет после него XXII век еще не начался). Заодно можно заметить, что мы, по-видимому, уже получили второй ответ: из потенциальных кандидатов в субботу начинается только 2084 год. Осталось понять, сколько придется хранить его календарь.

2100 год начнется в пятницу. Но високосным он не будет, поэтому 2104 год начнется не в среду, а во вторник. Дальше чередование сохраняется:

Год	День недели
2104	вторник
2108	воскресенье
2112	пятница
2116	среда
2120	понедельник
2124	суббота

Отсюда видно, что, во-первых, максимальный срок хранения календарей оказался равен 40 годам, во-вторых, в XXI веке настолько «неудачных» годов пять, но в субботу начинается только один из них — уже найденный нами 2084 год.

Задача № 49

Сегодня Луна покрыла Альдебаран (α Тельца). В какой фазе она при этом находилась? Известно, что в марте Луна опять покроет Альдебаран. В какой фазе она при этом будет?

Решение. Сегодня — 5 февраля. Солнце в созвездии Тельца будет в конце мая — начале июня, т.е. примерно через 4 месяца. Таким образом, угловое расстояние на небе от Луны до Солнца сейчас около $4 \cdot (360/12) = 120°$, причем Когда угол между Луной от Солнцем на небе прямой, т.е. 90°, освещена половина диска и Луна в первой четверти. Когда угол развернуты, т.е. 180°, то диск освещен целиком и Луна — полная. Это значит, что сегодня освещено больше половины диска, (примерно на одну треть от оставшейся половины), следовательно Луна растущая, чуть больше первой четверти.

В следующий раз Луна покроет Альдебаран ровно через то время, которое ей требуется, чтобы завершить оборот вокруг Земли относительно звезд. Это время равно 27.3 суток. Для того, чтобы полностью повторилась фаза Луны, необходимо чуть большее время — так называемый синодический месяц — 29.5 суток. То есть к мартовскому покрытию Луна «не дойдет» до фазы, при которой было февральское покрытие, примерно 2 суток, следовательно она будет располагаться на небе ближе к Солнцу, на $2 \cdot (360°/29.5) \approx 24°$. С той точностью, с которой мы выполняем оценки положения Луны, можно считать, что она будет практически ровно в первой четверти.

Так как путь Солнца по созвездию Тельца занимает около месяца, то точное определение углового расстояния на небе между Луной и Солнцем 5 февраля выходит далеко за рамки задачи для 5-6 классов. Таким образом, будет оцениваться не ответ в виде точной фазы, а общих ход рассуждений и ответ, не противоречащий им.

Задача № 50

Нейтрино, прилетевший к Земле от сверхновой, вспышка которой наблюдалась в феврале 1987 года, пролетел сквозь Землю и полетел дальше. Считая, что нейтрино движется со скоростью света, оцените расстояние в километрах, на которое он к настоящему времени удалился от Земли.

Решение. Если вспышка сверхновой наблюдалась 30 лет назад, а нейтрино летит со скоростью света, то он также прилетел к Земле 30 лет назад. Значит, к настоящему моменту он удалился от Земли на 30 световых лет. Скорость света равна 300 тысяч км/с. Число секунд в году можно оценить так: $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 32$ миллиона секунд. Следовательно за 30 лет нейтрино удалился от Земли на: $30 \cdot 32 \cdot 300 \approx 290\,000$ миллиардов км, т.е. на 290 триллионов км или примерно $3 \cdot 10^{14}$ км.

Задача № 51

9 июля в 4 часа утра Луна наблюдается в полнолунии. В тот же день двумя часами позже Луна на небе окажется рядом с Плутоном. Когда наступит ближайшее противостояние Плутона?

Решение. Луна в фазе полнолуния располагается в точке неба, противоположной Солнцу (противосолнечной). Период обращения Луны вокруг Земли равен 27.3 суток. В своем орбитальном движении она перемещается в противоположную вращению неба сторону, т.е. с запада на восток. Следовательно, Луна 9 июля за 2 часа Луна пройдет примерно 1° на восток. Это значит, что Плутон 9 июля расположен примерно в одном градусе к востоку от противосолнечной точки. Или Солнце в градусе к западу от «противоплутонной». Так как Солнце в годичном движении перемещается с запада на восток, то Солнце еще не дошло до точки противостояния около градуса. Очевидно, что Плутон на таких масштабах времени можно считать неподвижным. Известно, что Солнце проходит в своем годичном движении примерно 1° за 1 сутки. Следовательно, ровно через сутки после полнолуния наступит противостояние Плутона.

Задача № 52

Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> Там высоко-высоко кто-то пролил молоко
> и получилась Млечная дорога.
> А вдоль по ней...
> ...Месяц плывет, как белая пирога.

Для определенности будем считать, что при этом освещена ровно половина диска Луны, а рога месяца направлены вверх. Где примерно на Земле и в какое время года можно наблюдать подобную картину?

Решение. Известно, что Млечный Путь, о котором поется в песне, довольно сильно наклонен к плоскости эклиптики. Достаточно вспомнить, что Луна и планеты могут очень далеко отходить на небе от Млечного Пути.

Если рога месяца направлены вверх и освещена ровно половина диска, то угол между Луной и Солнцем равен 90°,а линия Луна–Солнце перпендикулярна одновременно горизонту наблюдателя и терминатору на Луне (границе освещенной и неосвещенной частей). Это с хорошей точностью означает, что перпендикулярной горизонту является эклиптика, т.к. наклон лунной орбиты к эклиптике мал. Такое бывает только в тропических широтах Земли.

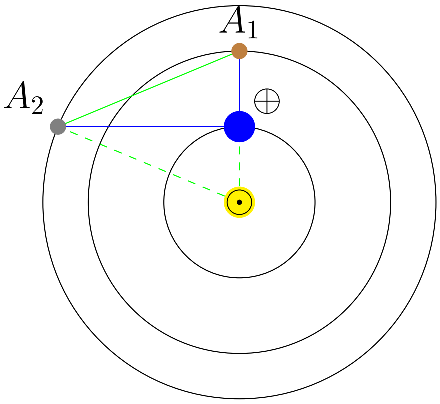
Месяц находится на Млечном пути и, одновременно на эклиптике. Так как Млечный Путь довольно сильно наклонен к эклиптике, это означает, что Луна в момент наблюдения находится в точке (близ точки) пересечения эклиптики и плоскости Галактики, т.е. средней линии Млечного Пути. Известно, что центр нашей Галактики располагается в созвездии Стрельца. Так как оно одновременно является зодиакальным, следовательно, точка пересечения эклиптики и плоскости Галактики располагается как раз в этом созвездии. Очевидно, что существует еще одна точка пересечения этих плоскостей и располагается она на эклиптике в противоположном Стрельцу созвездии, т.е. в Близнецах (на самом деле на границе созвездий Тельца и Близнецов).

Итак Луна в первой или последней четверти в созвездии Стрельца или Близнецов, при этом Солнце, очевидно, под горизонтом. В Северном полушарии такое может быть, если Луна в первой четверти и Солнце западнее ее, или если Луна в последней четверти, а Солнце восточнее. А Южное в данном случае можно не рассматривать, т.к. взаимное положение Солнца и Луны в любом случае будет таким, как описано выше. То есть Луна либо западнее Солнца на 90°, либо восточнее и при этом либо в Близнецах, либо в Стрельце. Это дает два варианта ответа: Солнце либо в Деве, либо в Рыбах, т.е. дело происходит либо в феврале–марте, либо августе–сентябре.

Задача № 53

С Земли производится радиолокация двух астероидов, один из которых находится в противостоянии, а другой — в квадратуре. Радиосигналы были посланы к астероидам одновременно, но от первого астероида сигнал вернулся обратно через 16 минут, а от второго — через 40 минут. Найдите расстояние между астероидами в этот момент. Определите радиусы орбит астероидов, считая, что орбиты круговые и лежат в плоскости эклиптики.

Решение. Если один из астероидов находится в противостоянии, а другой — в квадратуре, то в треугольнике, вершинами которого являются астероиды и Земля, угол при Земле будет прямым вне зависимости от того, где конкретно располагается каждый из астероидов. Значит можно воспользоваться теоремой Пифагора: квадрат расстояния между астероидами будет равен сумме квадратов расстояний между каждым из астероидов и Землей. Так как при радиолокации сигнал проходит расстояние до астероида дважды: туда и обратно, то расстояние от Земли до первого астероида равно 8 световым минутам, а до второго — 20. Следовательно, расстояние между ними равно $\sqrt{8^2+20^2}=\sqrt{464}\approx 21.5$ световым минутам. Тот же результат можно получить, построив рисунок в масштабе и измерив линейкой расстояние между астероидами.



Вспомнив, что расстояние от Земли до Солнца — 1 астрономическая единица — равно 8 световым минутам, можно сразу понять, что расстояние от Солнца до астероида A_2, т.е. радиус его орбиты, равно расстоянию между астероидами в данный момент, т.е. около 21.5 св. мин (это гипотенуза треугольника Земля–Солнце–астероид), или 2.7 а.е.. Также легко понять, что радиус орбиты астероида A_1 равен 2 а.е.

В принципе, не очень вероятно, но условие задачи может быть понято так, что появляется еще один вариант взаимного расположения тел: астероид A_2 находится в противостоянии и до него 20 св. мин., а A_1 — в квадратуре и до него 8 св. мин. В таком случае расстояние между астероидами останется таким же, 2.7 а.е., радиус орбиты астероида A_2 будет равен $8+20=28$ св. мин. или 3.5 а.е., а радиус орбиты A_1 будет равен $\sqrt{2}\approx 1.4$ а.е.

Задача № 54

Угловой размер Юпитера составляет $0'.5$. Оцените, насколько чаще в среднем Луна покрывает звезды, чем Юпитер.

Решение. Экспериментально выяснилось, что из-за неудачной формулировки условия задачи оно было прочитано разными участниками олимпиады по-разному. Одна группа участников поняла задачу так, как и задумывали авторы: «Оцените, насколько чаще Луны покрывает звезды, чем Юпитер покрывает звезды». Другая: «Оцените, насколько чаще Луна покрывает звезды, чем Луна покрывает Юпитер». Так как это две принципиально разных задачи, то приводим решение обеих, оба варианта решения будут оценены одинаково.

Первый вариант:

Так как задача оценочная, можно считать, что звезды распределены по небу равномерно, а Луна и Юпитер движутся строго по эклиптике. И Юпитер, и Луна, двигаясь по небу, «заметают» собой полосы, длины которых одинаковы и равны $360°$, а ширины равны угловым диаметрам светил. Если бы оба светила двигались по небу с одинаковой скоростью, то частота покрытий Луной звезд была бы во столько раз больше, во сколько площадь, заметаемая Луной больше, чем заметаемая Юпитером. Так как длины заметаемых полос равны, то площади их отличаются во столько раз, во сколько отличаются угловые диаметры Луны и Юпитера. Угловой диаметр Луны равен примерно $30'$, следовательно при одинаковой скорости частоты отличались бы в $30/0.5 = 60$ раз.

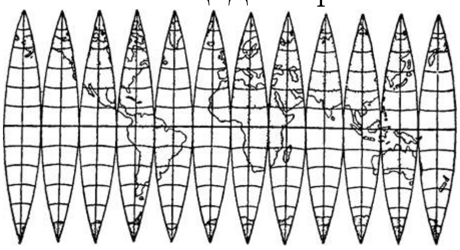
Однако, Луна делает полный оборот вокруг Земли относительно звезд за 27.3 суток, т.е. чуть меньше, чем за 1 месяц, а Юпитер завершает свой полный путь среди звезд за примерно за 12 лет (период полного оборота его вокруг Солнца). Тем самым скорость движения Луны по небу выше, чем у Юпитера примерно в 150 раз. Так что Луна в среднем будет покрывать звезды в $150 \cdot 60 = 9$ тысяч раз чаще, чем Юпитер.

Эту оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Известно, что Юпитер, как все планеты, совершает петлеобразное движение по небу. Таким образом, за 12 лет он проходит среди звезд бо́льший путь, чем если бы двигался просто по окружности. Если вспомнить приблизительные размеры петель, которые Юпитер описывает на небе, то можно оценить, что Юпитер заметает раза в полтора бо́льшую площадь, следовательно, соотношение частоты покрытий будет меньше, примерно 6 тысяч раз.

Второй вариант:

Если пренебречь наклоном лунной орбиты к эклиптике, то Луна в своем движении среди звезд заметает на небе полоску площадью $360° \cdot 0°.5 = 180$ квадратных градусов (см. предыдущий вариант решения). Если считать, что звезды распределены по небу равномерно, то количество звезд, которые Луна может покрыть за один проход по небу, равно (по правилу пропорции) числу всех звезд на небе, умноженному на отношение площади покрываемой Луной полоски к площади всего неба (т.е. доли площади неба, покрываемой Луной). Логично предположить, что речь идет о звездах, видимых невооруженным глазом. Их на всем небе насчитывается около 6 тысяч штук (любая разумная оценка числа звезд, о которых идет речь, будет принята).

Оценим площадь неба. Тот, кто знает, может сразу написать, что площадь неба составляет около 40 тысяч кв. градусов. Кто не знает, может с неплохой точностью оценить площадь неба как площадь карты звездного неба: $180°$ по ширине (от полюса, до полюса) и $360°$ по длине вдоль экватора, т.е. $180° \cdot 360° \approx 65$ тысяч кв. градусов. Видно, что эта оценка в полтора раза выше, чем истинное значение. Очевидно, что эта разница берется из-за невозможности без разрывов изобразить поверхность шара на плоскости. Вспомнив, как выглядит изображение развертки глобуса, например Земли (см. рисунок внизу), можно даже попытаться оценить ошибку, которую мы делаем, считая площадь неба как площадь карты.



Итак, в зависимости от оценки площади неба, получаем, что в полоске, заметаемой Луной, содержится примерно 20 (при площади неба 65 тыс. кв. гр.) или 30 (при 40 тыс. кв. гр.) звезд, видимых невооруженным глазом. Следовательно, Юпитер — который один — покрывается Луной в 20 или 30 раз реже, чем такие звезды.

Эту, довольно грубую, оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Лунная орбита все-таки наклонена к эклиптике заметно сильнее, чем орбита Юпитера. Из-за этого Луна не может покрывать Юпитер в каждый свой проход по небу. А звезды, если считать их распределенными равномерно, может, причем с той же частотой. Если считать, что Юпитер всегда располагается строго на эклиптике, что изменение частоты его покрытий Луной из-за наклона ее орбиты можно оценить т.к. Луна может покрыть Юпитер, находящийся на эклиптике, если в момент встречи с ним располагается недалеко от одной из точек пересечения своей орбиты с эклиптикой. При этом она может быть не более, чем на свой диаметр, т.е. на $0^\circ.5$ выше или ниже Юпитера. Так как требуется среднюю частоту покрытий, то нужно рассматривать очень большие промежутки времени. Тогда можно считать, что в момент встречи с Юпитером, Луна может находиться на любом расстоянии от эклиптики, от максимально возможного «вверх», до максимально возможного «вниз». Так как наклон орбиты Луны к эклиптике составляет примерно 5°, то в целом ширина полосы, в которой «в среднем» может находиться Луна, равна 10°, т.е. в 10 раз больше допустимого для покрытия промежутка в 2 диаметра Луны. таким образом, частота покрытия Юпитера снижается в 10 раз, а частота покрытия звезд остается неизменной. В результате, получаем, что видимые невооруженным глазом звезды Луна покрывает примерно в 300 раз чаще, чем она покрывает Юпитер.

Конечно, результат еще изменится, если участь, что Юпитер движется среди звезд, да еще и делая при этом петли, но учет этих факторов далеко выходит за рамки данной оценочной задачи.

Примечание. Заметим, что в решении данного варианта задачи совершенно не нужно использовать данный в условии угловой размер Юпитера. Это могло бы натолкнуть участников на иное толкование вопроса задачи.

Задача № 55

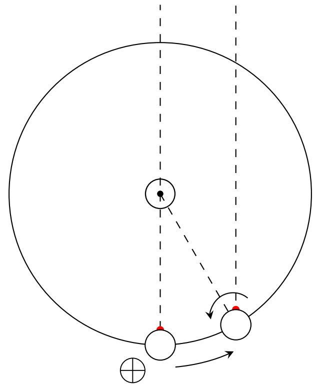
Студент-астроном заметил, что его старый механический будильник показывает одно и то же время каждый раз, когда Капелла оказывается на наибольшей высоте над горизонтом. Спешит или отстает будильник? На какое время он уйдет вперед или отстанет за один час?

Решение. Известно, что часы, которыми мы пользуемся в быту, ходят по времени, связанному с суточным движением Солнца по небу (конечно, усредненным). То есть, если мы будем каждые сутки наблюдать Солнце в момент, когда оно оказывается на наибольшей высоте над горизонтом (в так называемой верхней кульминации), то, в среднем, исправные часы будут показывать одинаковое время (полдень, если мы находимся в середине часового пояса и нет декретного времени)[2].

Если же мы будем наблюдать какие-нибудь звезды, например, Капеллу, в момент верхней кульминации, то показания наших часов в этот будут сдвигаться каждые сутки вследствие того, что Солнце перемещается по небу среди звезд в своем годичном движении.Определим, куда и насколько.

Для удобства рассмотрим некоторый момент времени, когда Земля повернута определенной стороной одновременно к Солнцу и к Капелле. Очевидно, что в этот момент обе эти звезды окажутся в верхней кульминации (неважно, что при этом Капелла не будет видна). Сделав полный оборот вокруг своей оси, Земля окажется направлена той же стороной к Капелле. Но за это время она успеет немного сместиться по орбите вокруг Солнца, и для того, чтобы оказаться в исходном положении относительно Солнца, ей необходимо еще немного повернуться. Именно время, затраченное на этот дополнительный небольшой поворот, и является разницей между периодом вращения Земли вокруг оси относительно звезд (истинными, или звездными, сутками) и периодом вращения Земли вокруг оси относительно Солнца (солнечными сутками) Заметим, что солнечные сутки несколько больше звездных. В целом за год получится, что относительно Капеллы Земля совершит ровно на 1 оборот вокруг своей оси больше, чем относительно Солнца, т.к. один ее оборот вокруг оси будет как бы «скомпенсирован» одним оборотом вокруг Солнца по орбите. Тем самым мы получаем, что, если продолжительность года составляет 365 солнечных и 366 звездных суток, то звездные сутки равны: $24 \cdot (365/366) \approx 23$ часа 56 минут, т.е. короче солнечных примерно на 4 минуты.

[2]Из-за неравномерности движения Солнца по небу, связанного с эллиптичностью земной орбиты и наклоном эклиптики к экватору, это время будет немного изменяться в течение года, совершая небольшие колебания относительно среднего значения, величина которых не превышает 16 минут (более подробно об этом можно узнать, прочитав про т.н. «уравнение времени»).



Тот, кто знает про т.н. «звездное время», мог написать этот результат сразу.

Следовательно в каждый последующий день будильник, отслеживающий движение Капеллы, т.е. идущий по звездному времени, в момент ее кульминации будет показывать на 4 минуты больше, чем обычный, идущий по солнечному времени. То есть он спешит на 4 минуты в сутки. Следовательно, за час будильник уйдет вперед на $4/24 = 1/6$ минуты или на 10 секунд.

Однако у задачи есть и второй вариант решения: будильник может просто стоять. Тогда за час он, естественно, отстанет на 1 час.

Задача № 56

Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

> ...звезда с звездою говорит.
>
> — Который час?
>
> — Двенадцатый, примерно...
>
> — А на Земле в этот час лучше всего видно нас......

Считая, что разговор происходит сегодня, оцените возможные значения экваториальных координат разговаривающих звезд.

Решение. Лучше всего звезды видны тогда, когда они находятся в верхней кульминации. Поскольку на Земле «примерно двенадцатый» час, можно считать, что действие происходит в истинную солнечную полночь, т.е. прямые восхождения Солнца и разговаривающих звезд отличаются примерно на 12^h.

Прямое восхождение Солнца в момент весеннего равноденствия по определению равно 0^h, а затем в течение года примерно равномерно увеличивается до 24^h, на 2^h за один месяц. Поскольку сегодня 5 февраля, то до очередного весеннего равноденствия (которое случится 20 марта) осталось полтора месяца. Следовательно, сегодня прямое восхождение Солнца равно примерно 21^h, а прямое восхождение разговаривающих звезд около 9^h.

Попробуем оценить склонение звезд. Во-первых, отметим, что условия видимости звезд тем слабее зависят от времени, чем дальше от небесного экватора эти звезды находятся. В самом деле, например, околополярные звезды в некоторой местности либо всегда видны (и примерно на одной и той же высоте над горизонтом), либо, наоборот, не видны совсем. Во-вторых, поскольку звезды лучше видны «на Земле», а не в каком-то определенном месте Земли, то, по-видимому, это означает, что их принципиально можно наблюдать практически со всей Земли. Отсюда получаем второй вывод — говорящие звезды находятся примерно на экваторе, т.е. их склонение близко к нулю.

Задача № 57

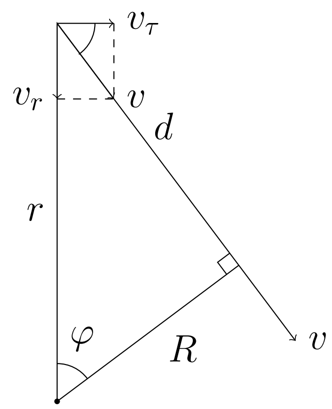
Звезда Барнарда (V2500 Oph) имеет: собственное движение по прямому восхождению $-0.8''/$год, по склонению $10''.3/$год; ее лучевая скорость равна -110 км/с; ее годичный параллакс составляет $0''.55$. Определите, когда ее полное собственное движение было (или будет) максимальным. Чему оно при этом будет равно?

Решение. Начнем с терминологического уточнения. Собственное движение — это угловая скорость движения звезды по небесной сфере. Соответственно, собственное движение по какой-то координате — это компонента угловой скорости, направленная перпендикулярно линии, на которой соответствующая координата не меняется, но (в общем случае) не скорость изменения этой координаты! Конечно, в случае собственного движения по склонению разница между этими двумя вариантами отсутствует, но вот в случае прямого восхождения ситуация иная. Разница будет отсутствовать в том случае, если звезда находится на небесном экваторе, но по мере приближения к полюсам одной и той же компоненте угловой скорости будет соответствовать все большая скорость изменения координаты. Сделав чертеж, можно обнаружить, что если скорость изменения прямого восхождения равна μ_α, то собственное движение по прямому восхождению равно $\mu_\alpha \cos\delta$, где δ — склонение звезды. В условии задачи дана уже вторая величина, с внесенной поправкой за $\cos\delta$, поэтому для определения общего собственного движения координаты звезды Барнарда не нужны.

Заметим, впрочем, что в данном случае учет изложенного выше обстоятельства практически не играет роли — звезда Барнарда очень удачно для нас движется в основном по склонению. Конечно, можно попытаться вычислить «более точное» значение собственного движения $\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos\delta)^2 + \mu_\delta^2}$, однако эта попытка, даже если она увенчается успехом, даст в результате «точное» значение $\mu = 10''.331\ldots/$год, которое с имеющейся в нашем распоряжении точностью исходных данных ничем не отличается от $\mu = \mu_\delta = 10''.3/$год.

Далее отметим, что лучевая скорость звезды Барнарда отрицательна, т.е. она направлена к нам. Таким образом, звезда сейчас приближается к Солнцу и в некоторый момент пройдет от него на минимальном расстоянии. В этот момент лучевая скорость звезды станет нулевой, пространственная скорость звезды v совпадет с тангенциальной скоростью (которая тем самым станет наибольшей), и, поскольку собственное движение звезды представляет собой отношение тангенциальной скорости к расстоянию до звезды, собственное движение в этот момент также станет наибольшим.

Построим чертеж:



Здесь r — расстояние до звезды Барнарда, $v_\tau = \mu \cdot r$ — тангенциальная скорость звезды Барнарда, v_r — ее лучевая скорость (все в данный момент), d — расстояние, которое звезда Барнарда пройдет до момента максимального сближения с Солнцем, R — минимальное расстояние от звезды Барнарда до Солнца.

Определим современное расстояние до звезды Барнарда r. Поскольку нам дан ее годичный параллакс π в секундах, то расстояние равно $r = 1/\pi = 1.8$ пк.

Для удобства дальнейших вычислений заметим, что в качестве единиц скорости проще использовать не километры в секунду, а астрономические единицы в год. Пересчитать одно в другое несложно, если вспомнить, что орбитальная скорость Земли составляет примерно 30 км/с и 6.28 а.е./год. Получаем, что 1 а.е./год$\approx$ 4.7 км/с.

Почему это удобно? Мы знаем, что сейчас на небесной сфере звезда Барнарда перемещается на $10''.3$/год. Известно, что с расстояния 1 пк под углом $1''$ видно расстояние 1 а.е. (просто по определению парсека). Поскольку все рассматриваемые углы малы, то это означает, что собственное движение $10''.3$/год на расстоянии 1.8 пк соответствует тангенциальной скорости $v_\tau = 1.8 \cdot 10.3 = 18$ а.е./год (сохранять больше значащих цифр не стоит — один из сомножителей имел только две значащих цифры, следовательно, и результат будет иметь столько же). Лучевая скорость $v_r = 110$ км/с ≈ 23 а.е./год (будем для удобства использовать ее модуль, поскольку всю необходимую информацию из ее знака мы уже получили и учли). Таким образом, полная пространственная скорость звезды $v = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} \approx 29$ а.е./год (заметим, что соответствующее вычисление можно легко заменить построением прямоугольного треугольника с катетами соответствующей длины (например, в сантиметрах) и измерением линейкой длины его гипотенузы).

Теперь найдем угол φ, отмеченный на чертеже (вернее, его синус и косинус, поскольку нужны нам на самом деле именно они). Из рисунка видно, что

$\sin\varphi = v_r/v = 23/29$, $\cos\varphi = v_\tau/v = 18/29$. Тогда $d = r\sin\varphi = 1.4$ пк и $R = r\cos\varphi = 1.1$ пк.

Осталось получить окончательный ответ. В тот момент, когда звезда Барнарда сблизится с Солнцем на минимальное расстояние, ее собственное движение $\mu_{\max} = v/R$. Использованные нами единицы позволяют сразу же подставить числа и получить $\mu_{\max} = 29/1.1 = 26''$/год.

Для определения времени, когда это случится, следует вспомнить, что в одном парсеке примерно 206265 астрономических единиц (естественно, именно такая точность не требуется). Соответственно, расстояние $d = 1.4$ пк со скоростью 29 а.е./год звезда Барнарда пройдет за время, равное $1.4 \cdot 2.06 \cdot 10^5/29 = 10^4$ лет.

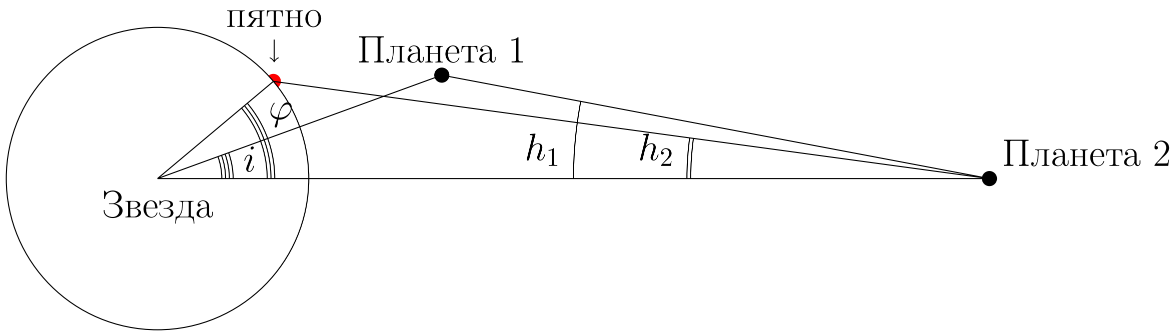
Наконец заметим, что мы совершенно не обсуждали два, казалось бы, возможных фактора: движение самого Солнца и то, что звезды могут двигаться не прямолинейно и равномерно. Однако в данном случае это не требуется.

Учет движения Солнца не нужен, поскольку все данные в условии величины определяются именно относительно него, т.е. мы с самого начала работали в системе отсчета, в которой Солнце покоится. Что же касается возможного отклонения движения звезд от прямолинейного и равномерного, то, с одной стороны, у нас нет данных, позволяющих это учесть, с другой — подобное отклонение может быть связано либо с вращением звезд вокруг центра Галактики, либо с гравитационным влиянием звезд друг на друга. Период обращения Солнца (а также близких звезд, вроде звезды Барнарда) вокруг центра Галактики на четыре порядка больше, чем интересующие нас интервалы времени, поэтому этим фактором мы действительно можем пренебречь, а для существенного изменения пространственных скоростей звезд из-за взаимодействия друг с другом звезды должны сблизиться на малое расстояние. Однако мы сами только что получили оценку характерного времени сближения и минимального расстояния для одной из ближайших к Солнцу звезд, которая к тому же нестандартно быстро движется. Очевидно, что других претендентов на близкое сближение с Солнцем или звездой Барнарда за интересующие нас недолгие 10 тысяч лет, просто не имеется.

Задача № 58

В некоторой планетной системе звезда имеет радиус, равный солнечному. Одна из планет имеет радиус орбиты 0.3 а.е., вторая — 2 а.е. Плоскость орбиты первой планеты наклонена на $5°$ к плоскости вращения звезды, орбита второй планеты лежит в плоскости вращения звезды. На поверхности звезды имеется пятно на широте $+10°$. Можно ли с экватора второй планеты наблюдать затмение первой планетой пятна, если ось вращения второй планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты?

Решение. Пусть a — радиус орбиты Планеты 1 , i — ее наклон, φ — широта пятна, R — радиус звезды, r — радиус орбиты Планеты 2. Построим рисунок (для наглядности радиус звезды и углы сильно преувеличены):



Максимальная высота первой планеты при наблюдении со второй

$$h_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a \cdot \sin i}{r - a \cdot \cos i}\right).$$

Все углы в этой формуле малые, поэтому арктангенс и синус соответствующих углов равны им самим, выраженным в радианах, а косинус можно с очень хорошей точностью считать равным 1. Заметим, что при пересчете синуса и арктангенса коэффициент, связывающий радианы и градусы, войдет в формулу дважды: в знаменатель и в числитель, и тем самым сократится. Тогда формулу можно переписать в виде :

$$h_1 = \frac{a \cdot i}{r - a},$$

где угол i выражен в градусах. Отсюда получаем, что $h_1 = 0^\circ.88$.

Заметим, что это значение больше, чем угловой радиус звезды, видимый с Планеты 2 ($0^\circ.5/4 = 0^\circ.125$). Тем самым высоту пятна для наблюдателя h_2 можно не вычислять. Очевидно, что покрытие принципиально возможно, если только пятно «доживет» до подходящего момента.

Задача № 59

Оцените путь, который Солнце проходит в Солнечной системе (относительно центра масс Солнечной системы) за год.

Решение. Для того, чтобы найти скорость движения Солнца относительно центра масс (барицентра) Солнечной системы, следует понять, почему центр Солнца не совпадает с барицентром. Это является следствием наличия в Солнечной системе других массивных тел. Что это за тела?

Очевидно, что они должны быть достаточно тяжелыми. Самое тяжелое, что имеется — планеты. Если некоторая планета имеет период обращения вокруг Солнца, равный P, радиус орбиты r и массу m, то в таком случае скорость ее движения по орбите $v = 2\pi r/P$. Из закона сохранения импульса (или правила рычага вкупе с определением положения центра масс) следует, что $mv = MV$, где M — масса Солнца, а V — его скорость относительно центра масс.

Тогда

$$V = 2\pi \frac{r}{P} \frac{m}{M},$$

и, учитывая III закон Кеплера ($P = r^{3/2}$, если периоды мы измеряем в годах, а расстояния — в астрономических единицах), окончательно получаем

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{r}} \frac{m}{M}.$$

Массы всех планет земной группы явно слишком малы, и их можно не учитывать. Остаются планеты-гиганты. Однако, поскольку самая массивная планета-гигант — Юпитер — одновременно является и самой близкой к Солнцу, очевидно, что именно Юпитер является главной причиной движения Солнца вокруг центра масс Солнечной системы. Радиус его орбиты составляет около 5 а.е., масса составляет около 1/1000 массы Солнца, поэтому

$$V \approx \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ а.е./год.}$$

Соответственно, за один год Солнце проходит около 0.003 а.е. При желании ответ можно (но не обязательно нужно) перевести, например, в километры, получится примерно $4 \cdot 10^5$ км — расстояние, сравнимое с расстоянием от Земли до Луны.

Задача № 60

Звезда, имеющая видимую звездную величину 5^m, расположена на расстоянии 100 пк от Солнца. На каком расстоянии от звезды должна располагаться планета, чтобы количество энергии, приходящее на единицу площади планеты, было таким же, как на Земле от Солнца?

Решение. Абсолютная звездная величина Солнца примерно $+5^m$. Это означает, что Солнце, находясь на расстоянии 10 пк, имело бы видимую звездную величину $+5^m$. Если Солнце будет располагаться в 10 раз дальше, то освещенность, создаваемая им (прямо пропорциональная светимости и обратно пропорциональная квадрату расстояния) станет меньше в 10^2 раз. Следовательно, светимость звезды в 100 раз больше, чем светимость Солнца. Тогда для того, чтобы освещенность, создаваемая звездой на планете, совпадала с освещенностью, создаваемой Солнцем на Земле, нужно, чтобы планета располагалась от звезды в 10 раз дальше, чем Земля от Солнца, т.е. искомое расстояние должно равняться 10 а.е.

Задача № 61

Оцените, во сколько раз светимость Земли больше суммарной светимости всех людей на планете.

Решение. Можно оценить светимость Земли и светимость одного человека, считая их абсолютно черными телами (что, конечно, верно лишь приблизительно). Однако, заметив, что средняя температура Земли и температура человека мало отличаются (вторая больше первой менее чем на 10%), и предположив, что излучательная способность и Земли, и тела человека в целом однотипным образом зависят от температуры (что также правдоподобно), можно сказать, что отношение светимостей в любом случае будет порядка отношения площадей поверхностей Земли и всех людей на Земле.

Предполагая, что человека можно представить как шар радиусом $R = 1$ м, получаем

$$\frac{L_\oplus}{L_{\text{людей}}} = \frac{4\pi R_\oplus^2}{N \cdot 4\pi R^2} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^2,$$

где N — число людей на Земле ($N \approx 7 \cdot 10^9$).

Подставляя числа, получаем, что отношение светимостей оказывается около $5 \cdot 10^3$. Естественно, точность оценки невелика, поэтому правильнее будет сказать, что итоговый результат — $10^{(3\div4)}$.

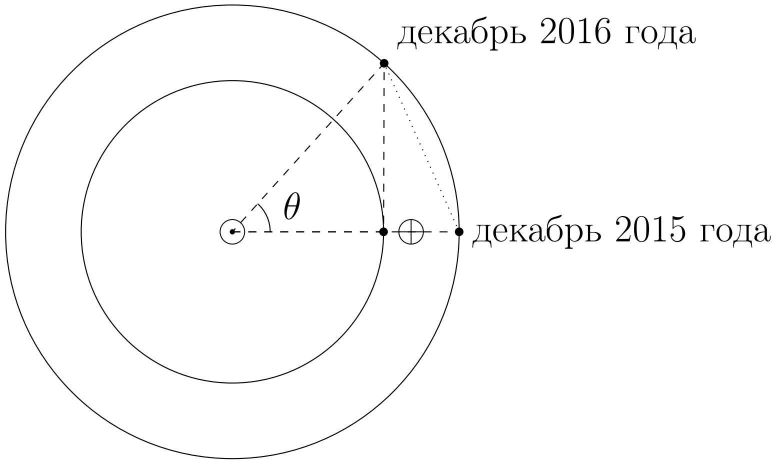
Задача № 62

Астероид наблюдался в Петербурге 23.12.2015 в истинную солнечную полночь в верхней кульминации на высоте 53°. 23.12.2016 он наблюдался в верхней кульминации уже через 6 часов после полуночи на высоте 30°. Определите параметры орбиты астероида, считая его орбиту круговой.

Решение. Заметим, что указанные высоты кульминаций для широты Петербурга $\varphi = 60°$ означают, что кульминации происходили к югу от зенита. Поскольку высота в верхней кульминации к югу от зенита равна $h = 90° - \varphi + \delta$ (где δ — склонение), то в декабре 2015 года астероид имел склонение $\delta_{2015} = 23°$, а в декабре 2016 года — $\delta_{2016} = 0°$.

Поскольку 23 декабря — это примерная дата зимнего солнцестояния, Солнце в эти дни имело прямое восхождение $\alpha_\odot = 18^h$. Астероид, кульминировавший в 2015 году в истинную солнечную полночь, соответственно, имел прямое восхождение $\alpha_{2015} = 6^h$, а поскольку в 2016 году его кульминация произошла на 6 часов позже, то там $\alpha_{2016} = 12^h$. Сравнив это с уже известными склонениями, можно заметить, что в декабре 2015 года астероид находился в точке летнего солнцестояния, а в декабре 2016 года — в точке осеннего равноденствия. Следовательно, он движется по эклиптике.

Кроме этого, можно отметить, что в декабре 2015 года астероид наблюдался в противостоянии, а в декабре 2016 года — в квадратуре, причем за один год он прошел по эклиптике либо угол 90°, двигаясь в том же направлении, что и Солнце, либо угол 270°, двигаясь в обратном направлении (обладая т.н. «ретроградной» орбитой). Пройти больше 360° и оказаться в нужном месте он не мог — поскольку он был в противостоянии, то период его обращения вокруг Солнца заведомо больше одного года. Определим, какую долю своей орбиты он при этом прошел, для чего построим чертеж:



Если радиус орбиты астероида a, то угол между направлениями на него с вершиной в Солнце равен $\theta = \arccos(1/a)$, причем за год астероид прошел либо θ, либо $2\pi - \theta$. Соответственно, период его обращения вокруг Солнца в годах составляет либо $P_1 = 2\pi/\theta$, либо $P_2 = 2\pi/(2\pi - \theta)$ (угол θ мы измеряем в радианах, хотя, конечно, можно воспользоваться и градусной мерой, соответствующим образом изменив выражения). Измеряя a в астрономических единицах, мы можем, воспользовавшись III законом Кеплера, выразить $P = a^{3/2}$, откуда в конечном счете имеем два уравнения:

$$a_1^{3/2} \arccos(1/a_1) = 2\pi,$$

$$a_2^{3/2} \left(2\pi - \arccos(1/a_2)\right) = 2\pi,$$

определяющих возможные значения большой полуоси орбиты астероида. Конечно, решать их аналитически затруднительно. Однако подобрать ответ с разумной точностью все же можно.

Возведем первое из уравнений в квадрат: $a_1^3 \arccos^2(1/a_1) = 4\pi^2 \approx 40$, и вычислим левую часть для $a_1 = 2, 3, 4$. При этом арккосинус можно оценить, например, просто построив прямоугольный треугольник с нужным соотношением катета и гипотенузы, а затем измерив угол при вершине. Еще один способ оценки арккосинуса: можно, догадавшись, что аргумент $1/a$ будет достаточно малым, записать, что для $x \approx 0$ верно $\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - x$ (ошибка в интересующем нас случае появится в третьем знаке после запятой, что весьма недурно и более чем достаточно для наших целей).

Наконец, можно вообще обойтись без арккосинусов, если вспомнить II закон Кеплера и считать, что площадь сектора, которую радиус-вектор астероида замел за год, мало отличается от площади треугольника с вершинами в двух наблюдавшихся положениях астероида и в Солнце. Из рисунка видно, что площадь этого треугольника равна $\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}$, и тогда

$$P_1 = a_1^{3/2} \approx \frac{\pi a_1^2}{\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}},$$

что сводится к уравнению $(a_1^2 - 1)\, a_1 = 4\pi^2$.

Все эти варианты в конечном счете дают близкие результаты: $a_1 \approx 3$ а.е.

Один из корней второго уравнения очевиден: $a_2 = 1$ а.е. Можно задаться вопросом, существуют ли другие. Попробуем воспользоваться предложенной выше оценкой арккосинуса. Если $1/a_2 \ll 1$, то

$$a_2^{3/2}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\right) = 2\pi.$$

Даже если пренебречь малым слагаемым $1/a$, получаем $3\pi\, a^{3/2} = 4\pi$, откуда $a_2^{3/2} = 4/3$, причем это оценка a_2 сверху. Фактически это означает, что в любом случае $a_2 \approx 1$ а.е. (а использование более серьезных математических методов покажет, что других решений нет).

Эксцентриситет орбиты равен нулю по условию, аргумент перицентра для круговых орбит не определен и, поскольку орбита лежит в плоскости эклиптики, долгота восходящего узла также не определена.

Осталось разобраться с наклоном орбиты к плоскости эклиптики. Он может быть равен 0°, если астероид вращается в ту же сторону вокруг Солнца, что и Земля (когда большая полуось его орбиты равна 3 а.е.), и 180°, если направление движения обратное, а большая полуось орбиты равна 1 а.е.

Задача № 63

Сверхновая Тихо Браге появилась на небе 6 ноября 1572 года и имела в максимуме блеск, равный -4^m. Сверхновая Кеплера появилась на небе 9 октября 1604 года и имела в максимуме блеск $-2^m.5$. Считая, что в максимуме блеска обе сверхновые имели абсолютную звездную величину, равную $-19^m.5$, определите, вспышка какой из Сверхновых произошла раньше и насколько.

Решение. Запишем соотношение между абсолютной звездной величиной M, видимой звездной величиной m, расстоянием до объекта, выраженном в парсеках r, а также (для вящей точности) поглощением излучения в межзвездной среде Галактики A:

$$m = M + 5\,\lg r - 5 + A \cdot r.$$

Отсюда, выражая для каждой из двух сверхновых абсолютную звездную величину и приравнивая полученные выражения, имеем

$$m_{\text{ТБ}} - 5\,\lg r_{\text{ТБ}} + 5 - A \cdot r_{\text{ТБ}} = m_{\text{К}} - 5\,\lg r_{\text{К}} + 5 - A \cdot r_{\text{К}}.$$

Преобразовав выражения (и записав их с учетом того, что $r_{\text{К}} > r_{\text{ТБ}}$), получаем

$$m_{\text{К}} - m_{\text{ТБ}} = 5\,\lg \frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + A \cdot (r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}).$$

Подставим числа, учитывая, что поглощение в Галактике составляет $1^m \div 2^m$ на килопарсек, т.е. в используемых единицах $A \sim 10^{-3}$:

$$1.5 = 5\,\lg\frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + 10^{-3}\cdot(r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}). \qquad (*)$$

Решить это уравнение сразу несколько затруднительно, но можно подобраться к решению по частям.

Забудем на какое-то время про межзвездное поглощение и сосчитаем оценочное расстояние до Сверхновой Тихо Браге $\tilde{r}_{\text{ТБ}}$:

$$-4 = -19.5 + 5\,\lg\tilde{r}_{\text{ТБ}} - 5,$$

откуда $\tilde{r}_{\text{ТБ}} \sim 10^4$ пк. В таком случае для Сверхновой Кеплера (также без учета поглощения) можно записать

$$1.5 = 5\,\lg\frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}}$$

и

$$\frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}} = 10^{0.3} \approx 2,$$

т.е. она произошла на расстоянии, в 2 раза большем.

Отсюда сразу же следует, во-первых, что вспышка Сверхновой Кеплера произошла существенно раньше, во-вторых, что для оценок расстояний пренебрегать межзвездным поглощением не стоит.

Вернемся к формуле (*), но будем измерять расстояния в килопарсеках (и переобозначим их как R с нужным индексом). Тогда

$$\frac{1}{3} = \lg\frac{R_{\text{К}}}{R_{\text{ТБ}}} + \frac{1}{5}\cdot(R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}}).$$

Очевидно, что отношение расстояний должно быть меньше 2, причем существенно меньше (наблюдаемую разницу в видимых звездных величинах $1^m.5$ можно накопить только за счет поглощения на расстоянии порядка 1 кпк), а даже ближайшая Сверхновая заведомо дальше $1 \div 2$ кпк, поэтому пренебрежем первым членом в правой части, считая, что он мал. Тогда $R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}} \approx 2$ кпк и, следовательно, вспышка Сверхновой Кеплера произошла на несколько тысяч лет раньше, чем вспышка Сверхновой Тихо Браге (в одном парсеке примерно 3.26 светового года, моменты регистрации вспышек на таких временных масштабах очевидно можно считать фактически совпадающими).

Заметим, что задачу можно было решать и другим путем: любым способом оценив, что расстояние до Сверхновых порядка 10^1 кпк, сказать, что на таких масштабах одинаковые объекты на разных расстояниях имеют разный блеск в основном из-за ослабления межзвездным поглощением (а не из-за собственно уменьшения блеска с расстоянием), после чего сразу же перейти к последнему этапу решения, изложенного выше. Отметим также, что итоговая численная оценка разницы расстояний существенно зависит от принятой оценки межзвездного поглощения, хотя порядок величины, конечно, останется тем же. Дополнительно можно отметить, что полученная оценка сделана в предположении однотипности двух Сверхновых, хотя в реальности тип Сверхновой Кеплера неизвестен.

Задача № 64

Для изменения орбиты опасного астероида диаметром 300 м предлагается ударить по нему тяжелой твердой болванкой массой 300 кг, двигающейся со скоростью 10 км/с относительно астероида. Известно, что большая полуось орбиты астероида равна 1 а.е., а ее эксцентриситет не превосходит 0.25. Оцените, в каких пределах может измениться большая полуось орбиты этого астероида вследствие такого столкновения.

Решение. Начнем с оценки массы астероида. Считая, что средняя плотность вещества астероидов около $2 \cdot 10^3$ кг/м^3, и оценивая объем астероида как $300^3 \approx 3 \cdot 10^7$ м^3 (для оценки его вполне можно считать и кубическим), получаем массу порядка $6 \cdot 10^{10}$ кг, причем сразу отметим, что точность этой оценки весьма невелика.

Дальнейшие рассуждения можно вести несколькими путями, мы опишем самый короткий, но не обязательный.

Вспомним одну из форм интеграла энергии:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где v — скорость движения тела по орбите вокруг притягивающего центра, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра (в нашем случае Солнца), r — расстояние до притягивающего центра, a — большая полуось орбиты. В момент удара расстояние r не меняется, но меняется скорость v, что может привести к изменению a, которое и требуется найти.

Совершенно очевидно, что изменение скорости за счет удара будет небольшим, и малое изменение v приведет к малому изменению a. В то же время начальное значение скорости v, а также значение r могут быть разными, поскольку орбита астероида в общем случае эллиптическая. Но, поскольку эксцентриситет орбиты астероида ограничен сверху значением $e = 0.25$, то расстояние r меняется в пределах от $a\,(1-e)$ до $a\,(1+e)$ (т.е. менее чем в два раза), как следствие, величина начальной скорости может меняться также максимум примерно в два раза. Отсюда следует важный вывод: с учетом низкой точности оценки массы астероида рассматривать разные случаи (столкновение в перигелии или афелии, удар «в хвост» астероида, увеличивающий его импульс, или, наоборот, «в лоб»), практически бесполезно. Достаточно ограничиться одной оценкой для некоторого «среднего» случая.

Заметим, впрочем, что можно выбрать для оценки и наиболее эффективный вариант изменения орбиты. Для этого надо, чтобы скорость астероида в относительных величинах изменилась сильнее всего, а это получится в ситуации, когда удар будет произведен «в лоб» в тот момент, когда скорость движения астероида будет минимальной (т.е. он будет находиться в афелии самой вытянутой из всех возможных орбит).

Получим все же «среднюю» оценку. При движении по круговой орбите астероид будет двигаться со скоростью, равной орбитальной скорости Земли, т.е. примерно 30 км/с. Считая, что его столкновение с болванкой будет абсолютно неупругим, и воспользовавшись законом сохранения импульса, получим, что скорость астероида изменится на величину, не превосходящую $\Delta v = \frac{m}{M}V$, где m — масса болванки, M — масса астероида, V — относительная скорость движения болванки, данная в условии. Подставляя числовые данные, получаем $\Delta v \approx 5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Осталось определить, каким будет изменение большой полуоси a при таком крошечном изменении скорости. Сделать это можно, например, т.к. Выразим из интеграла энергии член $2/r$:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{2}{r}$$

и приравняем левые части для исходных и измененных значений скорости и большой полуоси:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{(v+\Delta v)^2}{GM} + \frac{1}{a+\Delta a}.$$

После раскрытия скобок, сокращения одинаковых слагаемых справа и слева и пренебрежения членом, содержащим $(\Delta v)^2$, как очевидно малым на фоне остальных, получаем

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\Delta a} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Левую часть равенства можно привести к общему знаменателю, после чего избавиться от малого слагаемого Δa в одном из сомножителей знаменателя:

$$\frac{\Delta a}{a^2} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Затем, немного преобразовав полученное выражение и вспомнив, что для круговой орбиты (с которой мы и работаем) $v = \sqrt{GM/a}$, получим:

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Относительное изменение скорости $\frac{\Delta v}{v} = 5 \cdot 10^{-5}/(3 \cdot 10^4) \approx 5/3 \cdot 10^{-9}$, следовательно, относительное изменение большой полуоси $\Delta a/a \approx 3 \cdot 10^{-9}$. Так как большая полуось $a = 1.5 \cdot 10^{11}$ м, то изменение $\Delta a \approx 5 \cdot 10^2$ м, т.е. порядка километра.

Те, кто умеет пользоваться дифференциальным исчислением, вычислительную часть решения могут провести проще, просто сосчитав дифференциал обеих частей равенства в интеграле энергии и сразу получив связь между изменением скорости и большой полуоси. Результат, впрочем, будет таким же.

Задача № 65

Для объяснения аномального отрицательного ускорения АМС «Пионер-10» предполагалось существование вещества, при движении в котором АМС замедляется из-за столкновения с его частицами. Допустим, что вещество сферически-симметрично заполняет пространство вокруг Солнца с постоянной плотностью. Оцените плотность вещества, если известно, что полное аномальное ускорение, обусловленное столкновениями и гравитационным притяжением АМС веществом, на расстоянии 100 а.е. от Солнца равно 10^{-9} м/с^2. АМС удаляется от Солнца с параболической скоростью, масса станции равна 200 кг, площадь поперечного сечения станции равна 1 м^2. Можно считать, что столкновения АМС с частицами абсолютно упругие.

Решение. По условию на расстоянии r от Солнца АМС движется со скоростью $v = \sqrt{2GM/r}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца (массу вещества внутри для оценки скорости, очевидно, можно не использовать, раз уж она создает настолько малое ускорение).

Тогда аномальное ускорение $w_{\text{т}}$, создаваемое за счет столкновений с частицами вещества, можно оценить следующим образом. За небольшое время t станция сталкивается с веществом, находящимся в цилиндре, площадь основания которого равна поперечному сечению станции ΔS, а высота равна $v\,t$. Если плотность вещества равна ρ, то в результате столкновения АМС получает (или, вернее, теряет) импульс, равный $2\cdot v\,t\,\Delta S\,\rho\cdot v$ (коэффициент 2 появляется из-за того, что столкновения упругие, и АМС получает удвоенный импульс каждой частицы, с которой сталкивается). Изменение импульса за единицу времени — это сила, действующая на АМС, если мы ее разделим на массу станции m, то получим искомое ускорение. Итого

$$w_{\text{т}} = \frac{2v^2\,\Delta S\,\rho}{m} = \frac{4GM\,\Delta S\,\rho}{m}\cdot\frac{1}{r}.$$

Аномальное гравитационное ускорение $w_{\text{г}}$, вызванное наличием вещества, в соответствии с теоремой Ньютона, создается только тем веществом, которое находится внутри радиуса r вокруг Солнца. Тогда

$$w_{\text{г}} = \frac{4G\pi r^3\rho}{3r^2} = \frac{4G\pi\rho}{3}\,r$$

Таким образом, полное аномальное ускорение

$$w = w_{\text{т}} + w_{\text{г}} = 4G\rho\,\left(\frac{M\,\Delta S}{m\,r} + \frac{\pi\,r}{3}\right)$$

Осталось вычислить ответ. Начнем с оценки слагаемых в скобках (все величины выражены в системе СИ):

$$\frac{M\,\Delta S}{m\,r} = \frac{2\cdot 10^{30}\cdot 1}{2\cdot 10^{2}\cdot 10^{2}\cdot 1.5\cdot 10^{11}} \approx 7\cdot 10^{14}.$$

$$\frac{\pi\,r}{3} = \frac{3\cdot 10^{2} 1.5\cdot 10^{11}}{3} = 1.5\cdot 10^{13}$$

Отсюда можно заметить, что на расстоянии 100 а.е. «гравитационная» часть играет существенно меньшую роль, чем «тормозная», и слагаемым, соответствующим $w_{\text{г}}$, можно пренебречь. Тогда

$$10^{-9} = 4G\rho\cdot 7\cdot 10^{14}$$

и

$$\rho = \frac{10^{-9}}{4\cdot 7\cdot 10^{-11}\cdot 7\cdot 10^{14}} = 5\cdot 10^{-15}\ \text{кг/м}^3.$$

Задача № 66

Работавший в России австрийский астроном Й. фон Литтров предлагал для связи с марсианами выкопать в Сахаре каналы, заполнить их смесью воды с керосином и поджечь. Допустим, таким образом «написаны» буквы размером 500 км каждая. Оцените минимально необходимый диаметр объектива телескопа, угловое разрешение которого достаточно для того, чтобы прочитать такой текст с Марса.

Решение. Как известно, большая полуось орбиты Марса составляет около 1.5 а.е. Соответственно, минимальное расстояние между Землей и Марсом составит около 0.5 а.е. (если пренебречь эксцентриситетом орбиты Марса), однако в этот момент наблюдатели с Марса будут видеть Землю рядом с Солнцем, что явно затруднит наблюдения. Поэтому для оценки будем считать, что расстояние, с которого марсиане наблюдают Землю, равно $r = 1$ а.е. (или $1.5\cdot 10^{11}$ м).

Для того, чтобы прочитать текст, необходимо различать буквы. Как следствие, телескоп должен обеспечивать возможность разрешать не буквы целиком, а части букв. Соответствующую оценку можно получить многими способами (например, вспомнив разрешение какого-либо экрана в пикселях и прикинув количество читаемых букв, которые при этом могут поместиться в одной строке), для определенности будем считать, что угловое разрешение телескопа должно позволить увидеть детали, линейный размер которых равен 1/10 размера буквы, т.е. $l = 50$ км.

Тогда угловой размер детали в радианах равен $\beta = l/r$ и он же примерно равен $\beta \approx \lambda/D$, где λ — длина волны наблюдения (для оптического диапазона это примерно $5\cdot 10^{-7}$ м), а D — искомый диаметр объектива телескопа. Отсюда

$$\frac{l}{r} = \frac{\lambda}{D}$$

и, подставляя числа, получаем $D = 1.5$ м.

Задача № 67

Предположим, что в результате катастрофы Солнце мгновенно сжалось настолько, что период его осевого вращения стал равен 3 секундам. Оцените среднюю температуру Солнца сразу после катаклизма. Считайте, что теплопотери во время сжатия и взаимодействие с какими-либо другими телами отсутствовало.

Решение. Для начала найдем новый радиус Солнца. По закону сохранения момента импульса произведение момента инерции I на угловую скорость ω постоянно, т.е.

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

(здесь и далее величины с индексом «0» относятся к начальному (т.е. реальному) состоянию Солнца, а величины без индекса — к тому, что получилось в результате катаклизма). Считая, что вид распределения плотности с радиусом в Солнце существенно не изменился, можно считать, что момент инерции пропорционален квадрату радиуса, $I \propto R^2$. Тогда, поскольку угловая скорость вращения обратно пропорциональна периоду, $\omega \propto 1/P$, получаем, что $R \propto \sqrt{P}$. Современный период вращения Солнца P_0 — примерно месяц, для удобства воспользуемся оценкой $P_0 = 3 \cdot 10^6$ с. Тогда в результате катаклизма радиус Солнца должен уменьшиться на три порядка и составить около 10^3 км (реальное значение $R_0 = 7 \cdot 10^5$ км).

Поскольку Солнце при катаклизме не обменивалось энергией с окружающей средой, сумма механической и тепловой (U) энергий должна была сохраниться. Механическая энергия состоит из кинетической энергии вращения W и гравитационной потенциальной энергии Φ. Оценим соответствующие величины, зная, что масса Солнца $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг (здесь и далее все вычисления проводятся в единицах СИ).

Начальная гравитационная потенциальная энергия

$$\Phi_0 \sim -\frac{G\mathfrak{M}_\odot{}^2}{R_0} = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^{41} \text{ Дж.}$$

Начальная кинетическая энергия вращения

$$W_0 = \frac{I_0\omega_0^2}{2} \sim \frac{\mathfrak{M}_\odot R_0^2 \cdot 4\pi^2}{P_0^2} = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 40}{(3 \cdot 10^6)^2} = 4 \cdot 10^{36} \text{ Дж.}$$

Поскольку, например, из теоремы вириала известно, что сумма внутренней энергии и кинетической энергии вращения по порядку величины совпадает с модулем гравитационной потенциальной энергии, то $U_0 \sim -\Phi_0$, а энергией вращения W_0 можно пренебречь.

После сжатия гравитационная потенциальная энергия (обратно пропорциональная радиусу) возрастет в 10^3 раз, т.е. $\Phi = \Phi_0 \cdot 10^3$. Поскольку кинетическая энергия вращения $W \propto R^2/P^2$ и, как уже получено выше, $P \propto R^2$, получаем, что $W \propto R^{-2}$, т.е. кинетическая энергия вращения возрастет в 10^6 раз.

Однако и после катаклизма кинетическая энергия вращения окажется на два порядка меньше, чем гравитационная потенциальная энергия, откуда можно сделать вывод, что энергия вращения практически не влияет на оценку итоговой внутренней энергии.

Заметим также, что изменение внутренней энергии при этом должно совпасть с модулем изменения гравитационной потенциальной энергии, но поскольку начальное значение Φ_0 на три порядка меньше Φ, можно сказать, что и $U \sim -\Phi$.

Осталось оценить среднюю температуру T. Поскольку $U \approx \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mu}\mathfrak{R}T$, где μ — молярная масса вещества Солнца ($\mu \sim 10^{-3}$ кг/моль), $\mathfrak{R}$ — универсальная газовая постоянная, получаем

$$T \sim \frac{4 \cdot 10^{41} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{30} \cdot 8} \sim 10^{10}\ \text{К}.$$

Задача № 68

При обработке данных о регистрации нейтрино от вспышки сверхновой в Большом Магеллановом облаке (БМО) 23.02.1987 возникло предположение, что нейтрино «опоздали» на 50 минут от ожидаемого момента из-за того, что скорость движения нейтрино была чуть меньше скорости света в вакууме. Оцените в рамках этого предположения массу нейтрино, если известно, что энергия каждого из зарегистрированных нейтрино составляла около 10^{-12} Дж. Расстояние до БМО — 50 кпк.

Решение. Известно, что полная энергия частицы массы m, движущейся со скоростью v, равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где c — скорость света в вакууме. Следовательно, для получения ответа необходимо найти скорость v.

Заметим, однако, что прямолинейная попытка сделать это приведет к неудаче: очевидно, что v практически совпадает со скоростью света, и расчет непосредственно по исходной формуле с требуемой точностью без калькулятора невозможен.

Преобразуем коэффициент в исходной формуле:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c^3}{\sqrt{(c - v)\,(c + v)}} \approx \frac{c^3}{\sqrt{(c - v) \cdot 2c}} = \frac{c^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{c}}}$$

Теперь учтем, что если нейтрино преодолели расстояние от БМО до нас за время t, то это расстояние равно $c(t - \Delta t) = vt$, где Δt — время, на которое «опоздали» нейтрино. Отсюда

$$\frac{v}{c} = \frac{t - \Delta t}{t} = 1 - \frac{\Delta t}{t},$$

поэтому

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{\Delta t}{t}.$$

Таким образом,

$$m = \frac{\sqrt{2}E}{c^2}\sqrt{\frac{\Delta t}{t}}.$$

БМО находится на расстоянии 50 кпк, что соответствует примерно 160 тысяч световых лет. Так как в году примерно $3 \cdot 10^7$ секунд, получаем, что $t \approx 5 \cdot 10^{12}$ секунд. $\Delta t = 3 \cdot 10^3$ секунд, поэтому

$$m = \frac{1.4 \cdot 10^{-12}}{(3 \cdot 10^8)^2}\sqrt{\frac{3 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{12}}} = 4 \cdot 10^{-34} \text{ кг}.$$

Отметим, что предположение оказалось неверным: полученная нами оценка на три порядка превышает современную верхнюю оценку массы нейтрино.

Задача № 69

При вспышке сверхновой SN1987A выделилась энергия 10^{46} Дж. Оцените массу звезды, которая излучит столько же энергии за всю свою жизнь на стадии Главной последовательности.

Решение. В звездах Главной последовательности происходит синтез гелия из водорода. Если предположить, что в гелий превращается в среднем примерно одна и та же доля массы исходной звезды (что близко к действительности), а также что при синтезе гелия из водорода в энергию переходит определенная доля массы «топлива» (что верно с весьма высокой точностью), то это означает, что за все время жизни на Главной последовательности звезда массы $\mathfrak{M}$ вырабатывает $\alpha\,\mathfrak{M}c^2$ энергии, где c — скорость света, α — некоторый постоянный для звезд разных масс коэффициент.

Поскольку светимость звезды на стадии Главной последовательности меняется достаточно слабо, то, зная светимость Солнца $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ Вт и его массу $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, а также время его жизни $\tau_\odot \approx 10^{10}$ лет $= 3 \cdot 10^{17}$ секунд, можно определить величину коэффициента α из соотношения

$$L_\odot\,\tau_\odot = \alpha\,\mathfrak{M}_\odot c^2.$$

Тогда полная высветившаяся звездой массы $\mathfrak{M}$ энергия

$$E = \alpha\,\mathfrak{M}c^2 = L_\odot\,\tau_\odot\,\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot},$$

откуда легко выражается масса звезды в массах Солнца:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} = \frac{E}{L_\odot\,\tau_\odot} = \frac{10^{46}}{4\cdot 10^{26}\cdot 3\cdot 10^{17}} \approx 80.$$

Задача № 70

«Так стояли Эльвэ и Мелиан, а вращающийся над ними звездный небосвод отсчитывал долгие годы. И деревья Нан Эльмота стали выше и темнее, прежде чем Мелиан и Эльвэ произнесли хоть одно слово».

Предположим, что они стояли в центре поляны диаметром 30 м, скорость роста деревьев Нан Эльмота составляла 0.5 м/год, а в момент встречи высота деревьев не превышала 15 м. Через какое время количество света звезд (вроде бы Солнце и Луна тогда еще не были созданы), достигающее поляны, уменьшится вдвое? Можно считать, что звезды равномерно распределены по небесной сфере Арды.

Решение. Необходимо понять, как будет меняться площадь видимой части небесной сферы. Площадь сферического сегмента составляет $2\pi R^2(1-\cos\theta)$, где R — радиус сферы, θ — угол между радиус-векторами сферы, проведенными к точке на основании сегмента и к вершине сегмента. В данном случае угол θ равен углу между направлением из центра поляны на вершины деревьев и зенит, $\operatorname{tg}\theta(t) = D\big/2H(t)$, где рост деревьев $H(t) = H_0 + \Delta H\cdot t$.

Пусть θ_0 — угол между горизонтом и направлением на вершины деревьев в момент встречи. Определим, через какое время площадь сегмента уменьшится вдвое:

$$\frac{2\pi R^2(1-\cos\theta_0)}{2\pi R^2\big(1-\cos\theta(t)\big)} = 2,$$

$$1-\cos\theta_0 = 2 - 2\cos\theta(t),$$

$$\cos\theta(t) = \frac{1+\cos\theta_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+D^2\big/4H_0^2}} \approx 0.85.$$

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)} - 1} \approx 0.62, \quad H(t) = \frac{D}{2\operatorname{tg}\theta(t)} = 24\text{ м}, \quad t = \frac{H-H_0}{\Delta H} = 18\text{ лет}.$$

Задача № 71

Вам дан список звезд с их небесными координатами: прямым восхождением (α) и склонением (δ), а также созвездиями, в которых они находятся. α измеряется в часах (единица измерения обозначается верхним индексом h) и изменяется в диапазоне от 0^h до 24^h (причем $24^h = 0^h$). δ измеряется в градусах и лежит в диапазоне от -90° до 90°.

Для некоторых звезд указано, что они в Петербурге в течение суток: не заходят за горизонт, заходят и восходят, не восходят над горизонтом.

Для некоторых звезд указан период, когда условия их наблюдения в Петербурге являются наилучшими (отметим, что из этого не обязательно следует, что в другие периоды года их наблюдать нельзя).

Заполните таблицу до конца и обоснуйте Ваши ответы. Лист с таблицей нужно приложить к решению.

Решение. Способов рассуждения в этой задаче может быть много, мы приведем только один из возможных.

Звезды Южного Креста никогда не бывают видны в Петербурге, следовательно, звезда Акрукс не восходит в Петербурге. Теперь обратим внимание на то, что звезды Канопус и Акрукс имеют две общих характеристики: они не восходят и не существует момента времени, когда их лучше наблюдать из Санкт-Петербурга. По-видимому, можно сделать вывод, что все звезды, которые никогда не наблюдаются, можно отнести к классу невосходящих (и наоборот).

Далее можно заметить связь между статусами «не восходит»/«восходит и заходит» и склонением звезды: если склонение больше или равно -26° (Антарес), то звезда по крайней мере восходит и заходит (или не заходит), если меньше или равно -36° — не восходит (Шаула). На самом деле граница по склонению равна -30° и определяется разностью широты места наблюдения и 90°.

Теперь, когда понятно, что класс звезды связан с ее склонением, попробуем понять, где проходит граница между незаходящими и восходящими и заходящими. Арктур ($\delta = 19^\circ$) заходит и восходит, а Мирах ($\delta = 36^\circ$) уже не заходит, звезд с промежуточными склонениями нет. Значит, граница проходит где-то в этом диапазоне. Точная граница — $\delta = 30^\circ$ — определяется разностью 90° и широты места наблюдения. Все звезды, имеющие склонение больше $\delta = 30^\circ$ относим к незаходящим. Про некоторые из этих звезд это, по-видимому, и так известно (например, можно было сразу же указать, что незаходящей звездой является Полярная). Итак, мы смогли распределить звезды по трем классам в зависимости от их склонения.

Для сравнения имеющихся данных и названий месяцев полезно составить отдельную таблицу (если Вы имеете опыт наблюдений конкретных звезд в какой-то из месяцев, то это полезно указать, в этом случае таблица может быть более полной). По ней можно заметить, что α и названия месяцев явно связаны, с увеличением прямого восхождения увеличивается и месяц наилучшего

Название звезды	Созвездие	$\alpha,^h$	$\delta,^\circ$	Лучше наблюдать	В течение суток
Адара	Большой Пес	7	-29		
Акрукс	Южный Крест	12	-63	никогда	
Алголь	Персей	3	41	начало ноября	не заходит
Альдебаран	Телец	5	17		
Альдиба	Дракон	17	66		
Альнаир	Журавль	22	-47		не восходит
Альтаир	Орел	20	9	конец июля	
Альфард	Гидра	10	-8		
Анкаа	Феникс	0	-42		не восходит
Антарес	Скорпион	16	-26	май	
Арктур	Волопас	14	19		восходит и заходит
Ахернар	Эридан	2	-57		
Бетельгейзе	Орион	6	7		восходит и заходит
Вега	Лира	19	39	июль	
Денеб	Лебедь	21	45		
Дубхе	Большая Медведица	11	62		
Заурак	Эридан	4	-14		восходит и заходит
Канопус	Киль	6	-53	никогда	не восходит
Капелла	Возничий	5	46		не заходит
Мерак	Большая Медведица	11	56		
Мирах	Андромеда	1	36		не заходит
Полярная	Малая Медведица	3	89		
Рас Альхаг	Змееносец	18	13		
Регор	Паруса	8	-47		
Регул	Лев	10	12	февраль	
Ригель Кентаврус	Центавр	15	-60	никогда	
Сириус	Большой Пес	7	-17	начало января	
Спика	Дева	13	-11		
Сухаиль	Паруса	9	-43		
Шаула	Скорпион	18	-37		не восходит
Фомальгаут	Южная Рыба	23	-29.5		восходит и заходит

К задаче № 71.

наблюдения. Однако $\alpha = 0^h$ приходится не на январь, а на какой-то другой месяц (примерно сентябрь).

Месяц	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
$\alpha,^h$	7	10			16		19, 20				3	

Теперь можно заполнить недостающие данные в таблице по имеющимся данным. С учетом информации о конце и начале месяцев можно обнаружить, что на один месяц приходится примерно 2^h по прямому восхождению.

Полная правильная исходная таблица выглядит так:

Название звезды	Созвездие	$\alpha,^h$	$\delta,^\circ$	Лучше наблюдать	В течение суток
Адара	Б. Пес	7	-29	начало января	восходит и заходит
Акрукс	Южный Крест	12	-63	никогда	не восходит
Алголь	Персей	3	41	начало ноября	не заходит
Альдебаран	Телец	5	17	начало декабря	восходит и заходит
Альдиба	Дракон	17	66	круглый год	не заходит
Альнаир	Журавль	22	-47	никогда	не восходит
Альтаир	Орел	20	9	конец июля	восходит и заходит
Альфард	Гидра	10	-8	февраль	восходит и заходит
Анкаа	Феникс	0	-42	никогда	не восходит
Антарес	Скорпион	16	-26	май	восходит и заходит
Арктур	Волопас	14	19	апрель	восходит и заходит
Ахернар	Эридан	2	-57	никогда	не восходит
Бетельгейзе	Орион	6	7	декабрь	восходит и заходит
Вега	Лира	19	39	июль	не заходит
Денеб	Лебедь	21	45	начало августа	не заходит
Дубхе	Б. Медведица	11	62	круглый год	не заходит
Заурак	Эридан	4	-14	ноябрь	восходит и заходит
Канопус	Киль	6	-53	никогда	не восходит
Капелла	Возничий	5	46	начало декабря	не заходит
Мерак	Б. Медведица	11	56	круглый год	не заходит
Мирах	Андромеда	1	36	октябрь	не заходит
Полярная	М. Медведица	3	89	круглый год	не заходит
Рас Альхаг	Змееносец	18	13	июнь	восходит и заходит
Регор	Паруса	8	-47	никогда	не восходит
Регул	Лев	10	12	февраль	восходит и заходит
Ригель Кентаврус	Центавр	15	-60	никогда	не восходит
Сириус	Б. Пес	7	-17	начало января	восходит и заходит
Спика	Дева	13	-11	начало апреля	восходит и заходит
Сухаиль	Паруса	9	-43	никогда	не восходит
Шаула	Скорпион	18	-37	никогда	не восходит
Фомальгаут	Южная рыба	23	-29.5	начало сентября	восходит и заходит

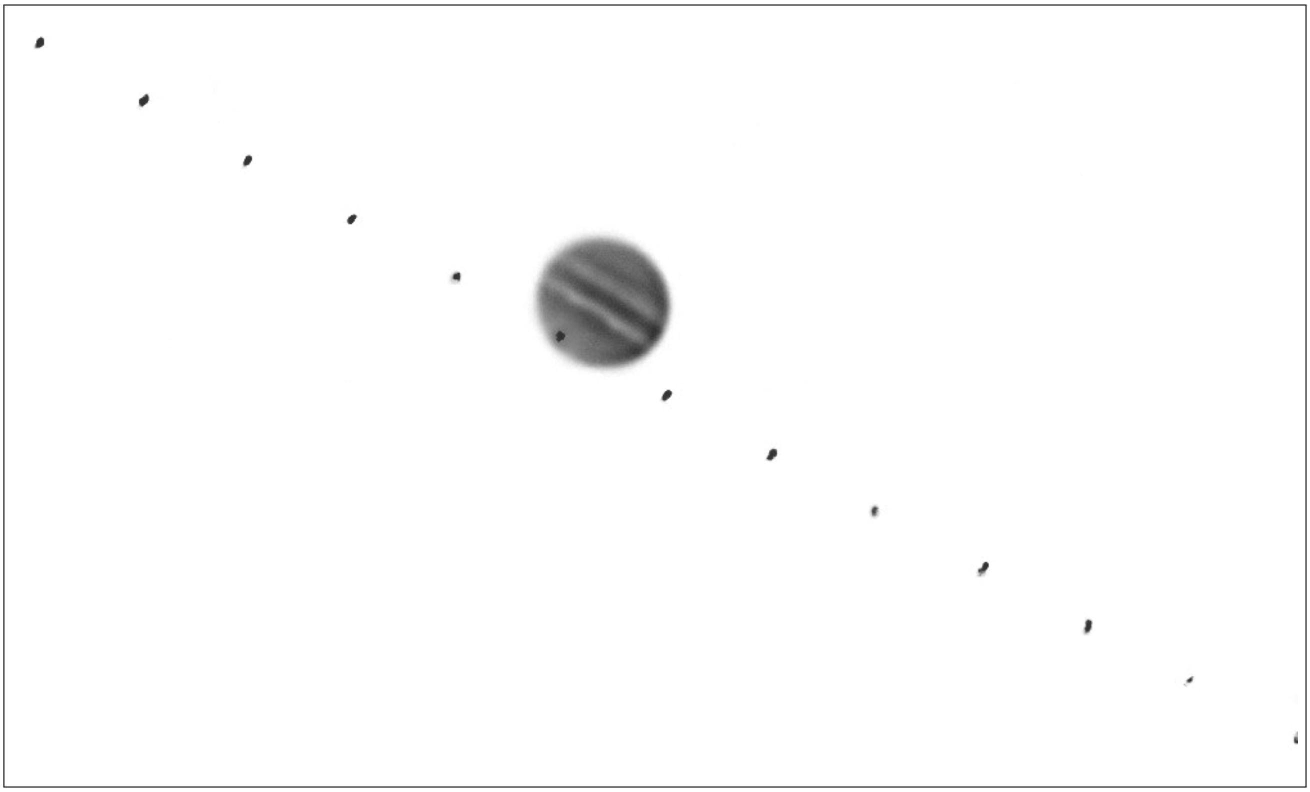
Отметим, что формально ответ о наилучшем периоде наблюдения Фомальгаута выглядит именно т.к. но эта звезда в Петербурге над горизонтом практически не поднимается, так что более реалистичным является ответ «никогда».

Задача № 72

Перед вами негатив фотографии прохождения космического телескопа «Хаббл» по диску Юпитера, сделанной 30 июля 2011 года на западном побережье

Австралии (автор Tom Harradine). Оцените продолжительность прохождения и частоту съемки (в кадрах в секунду), а также расстояние от фотографа до телескопа.

Известно, что «Хаббл» находился в поле зрения камеры (указанном рамкой на фотографии) около 1/5 секунды. Угловой размер Юпитера в этот день составлял $40''$. Можно считать, что линейная скорость телескопа «Хаббл» в момент съемки относительно фотографа составляла 7.5 км/с и была направлена под прямым углом к лучу зрения.



Решение. На изображении присутствует 13 изображений телескопа «Хаббл», таким образом, между соседними снимками проходило примерно $(1/5) : 12 = 1/60$ секунды, т.е. частота съемки составляла 60 кадров в секунду.

Измерив линейкой расстояние между соседними изображениями «Хаббла» и путь, пройденный телескопом по диску Юпитера, получаем, что последний составляет примерно 0.65 от первого. Это значит, что время транзита составляет 0.65 промежутка времени между соседними кадрами и равно $0.65 \cdot (1/60) \approx 1/100$ секунды.

Теперь разберемся со скоростями. Диаметр Юпитера ($40''$) примерно в 1.8 раза больше отрезка пути «Хаббла» по его диску, соответственно, «Хаббл» пролетает расстояние $40''$ за $1.8/100 = 0.018$ секунды. Полный круг в $360°$, или $(360 \cdot 60 \cdot 60)''$, «Хаббл» пролетел бы за $0.018 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60/40$ секунд, или $0.018 \cdot 360 \cdot 60/40 \approx 10$ минут.

Можно заметить, что полученное число в несколько раз меньше, чем минимальный период обращения спутника вокруг Земли, который составляет около 1.5 часов. Однако никакой ошибки тут нет — ведь рассуждая подобным образом, мы неявно предположили, что движение телескопа «Хаббл» происходит по окружности, в центре которой находится фотограф. В действительности же «Хаббл» обращается вокруг центра Земли, и расстояние между ним и фотографом со временем сильно меняется, не говоря уже о том, что фотограф также вращается вместе с Землей. Но при всем этом наше дальнейшее решение можно считать в полной мере корректным — ведь рассматриваемый промежуток времени съемки мал по сравнению с периодом обращения.

Итак, мы считаем, что в данный момент времени «Хаббл» движется по дуге некоторой окружности со скоростью 7.5 км/с, совершая 1 условный оборот за примерно 600 секунд. Таким образом, длина этой окружности составляет $7.5 \cdot 600 = 4.5$ тыс.км. Далее можно либо воспользоваться формулой для длины окружности $l = 2\pi R$ (здесь l — длина окружности, R — ее радиус), либо, например, вспомнить, что длина экватора Земли составляет примерно 40 тыс. км, а радиус Земли равен 6400 км, и составить пропорцию. Таким образом, получаем, что расстояние до телескопа «Хаббл» составляет $6400 \cdot 4.5/40 = 720$ км.

Стоит отметить, что полученный ответ, во-первых, близок к реальному значению (735 км), а во-вторых, сильно превышает высоту орбиты телескопа «Хаббл» (567 км). Однако на самом деле в этом нет ничего удивительного – ведь спутники можно наблюдать не только в зените, но и около горизонта, и при этом расстояние до них оказывается больше. Реальная высота Юпитера (и, соответственно, «Хаббла») над горизонтом в момент съемки составляла около 48°.

Задача № 73

Вы высадились на совершенно неизвестную планету, какие-либо данные о которой у Вас отсутствуют. Условия на планете более-менее пригодны для жизни, в частности, атмосфера прозрачна в оптическом диапазоне. Рельеф на планете почти отсутствует, место высадки находится на большом ровном участке, уходящем за горизонт. Период вращения планеты вокруг оси существенно меньше периода ее обращения вокруг звезды, угол наклона плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты вокруг звезды не превышает 45°.

Вам необходимо оценить:

- продолжительность местных «солнечных» суток;
- продолжительность года;
- свою широту;
- радиус планеты;
- массу планеты.

В вашем распоряжении имеются: часы с секундомером, линейка, а также некоторый запас небольших бытовых предметов, палок и веревок. На измерения Вы можете потратить несколько суток.

Предложите методы определения перечисленных выше величин и постарайтесь оценить их возможную точность.

Решение. Возможные методы решения задачи достаточно разнообразны, так что участники могут выбирать разные способы получения искомых величин. Естественно, при если предложенные методы реализуемы и обеспечивают более-менее приемлемую точность, они будут засчитаны. Мы изложим только некоторые из возможных вариантов действий.

Определение продолжительности суток и года. Продолжительность «солнечных» суток измеряется как интервал времени между двумя последовательными верхними кульминациями «Солнца». Для определения момента кульминации можно, воткнув в землю вертикальный шест, фиксировать положение конца его тени в течение дня. Тень минимального размера будет задавать направление небесного меридиана, после чего останется лишь зафиксировать моменты прохождения «Солнца» через меридиан.

Уже найденный меридиан можно использовать и для определения продолжительности звездных суток (т.е. периода вращения планеты вокруг своей оси) — нужно измерить интервал между двумя последовательными прохождениями какой-либо одной звезды через меридиан. Если продолжительность «солнечных» суток оказалась равной T, а продолжительность звездных — S, то отношение $P = T/|S - T|$ будет равно продолжительности года в звездных сутках.

В самом деле, если планета вращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и вокруг звезды (при этом $S < T$), то в течение года количество звездных суток будет на единицу превосходить количество «солнечных», а выражение для вычисления P можно переписать как

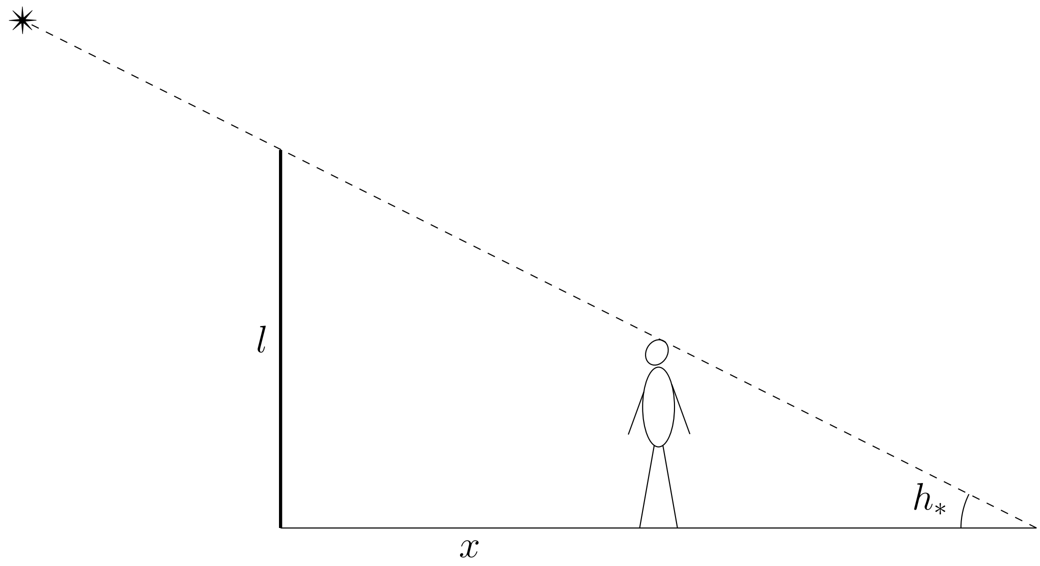
$$\frac{1}{P \cdot S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S},$$

«солнечные» сутки при этом являются синодическим периодом, возникающим из двух реальных периодов — вращения планеты вокруг оси S и обращения вокруг звезды $P \cdot S$. Если же направления осевого вращения планеты и обращения вокруг звезды разные, то ход рассуждений остается тем же, но $S > T$, поэтому в правой части выражения для синодического периода T и S поменяются местами.

Промежуточные случаи, когда планета вращается «лежа на боку», как Уран в Солнечной системе, можно не рассматривать — по условию угол наклона плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты вокруг звезды не превышает $45°$.

Определение широты места. Основой всех методов измерения широты является оценка высоты полюса мира над горизонтом, которая совпадает с широтой места наблюдения. Если более половины суток занимает ночь, то можно найти какую-либо звезду, которая наблюдается как в верхней, так и в нижней кульминации, тогда посередине между положениями двух кульминаций будет находиться полюс мира. Лучше, если звезда будет иметь обе кульминации с одной стороны от зенита (подходящие объекты легко выбрать, найдя в течение дня направление на полуденное положение «Солнца»).

Высоты звезды в кульминации можно измерить, воспользовавшись уже имеющимся шестом (лучше, если он будет выше роста человека) и найдя расстояние, с которого наблюдатель будет видеть звезду в точности на конце шеста. Тогда, зная высоту шеста l и высоту наблюдателя h, а также расстояние от шеста до наблюдателя x, мы можем вычислить высоту звезды над горизонтом h_*.



Из рисунка видно, что

$$\frac{l}{\frac{h}{\operatorname{tg} h_*} + x} = \operatorname{tg} h_*,$$

откуда

$$\operatorname{tg} h_* = \frac{l-h}{x}.$$

«Инструмент» получается простым в использовании, в темноте придется фиксировать только положение наблюдателя относительно шеста, что можно делать с помощью каких-нибудь колышков, втыкаемых в землю там, где наблюдатель находился при наблюдении звезды.

Если подобрать звезду, у которой можно наблюдать две кульминации сразу, не удастся, то задача станет несколько сложнее. Однако можно в течение ночи несколько раз определить высоты и азимуты (по отношению к какому-либо выделенному направлению) нескольких околополюсных звезд, а затем, нарисовав соответствующие участки их суточных траекторий, найти центр, относительно которого они движутся. В принципе, оба метода можно сочетать, усредняя результаты, итоговая точность только возрастет.

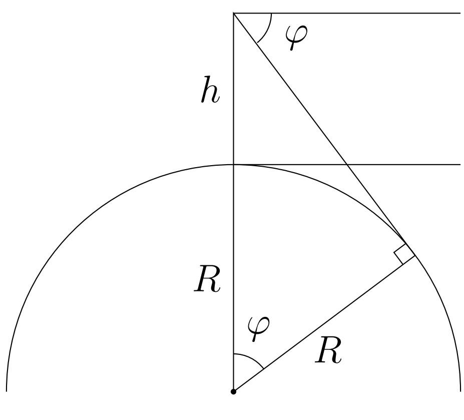
Определение радиуса планеты. Классический метод решения этой задачи предполагает оценку понижения горизонта на разных высотах над поверхностью планеты. Этот метод разработал в начале XI века Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед Аль-Бируни, подробное изложение метода Вы можете найти в решении задачи практического тура 9 класса XIX Санкт-Петербургской астрономической олимпиады, состоявшегося 11 марта 2012 года.

Однако в рассматриваемом нами сейчас случае ситуация несколько отличается. Место высадки находится на ровном пространстве, возвышенностей по условию поблизости не имеется (и нет оснований считать, что за имеющиеся несколько дней до них удастся добраться), а имеющихся материальных запасов, по-видимому, не настолько много, чтобы построить достаточно высокую гору непосредственно из них. Зато в нашем распоряжении имеется то, чего не было у Аль-Бируни — точные часы. Поэтому мы будем действовать так.

Во время заката «Солнца» наблюдатель ложится на землю и фиксирует время, когда верхний край диска звезды касается горизонта (можно использовать и нижний край, но верхний удобнее — не так слепит глаза). Заодно фиксируется и направление, в котором наблюдался в этот момент верхний край диска.

Затем наблюдатель встает на ноги и повторяет ту же процедуру, но уже в вертикальном положении. В результате мы знаем время, которое прошло между закатами на высотах, различающихся ростом наблюдателя (который мы уже измерили ранее) и разницу азимутов захода.

Если разница азимутов окажется небольшой (что означает, что мы попали не в полярную зону планеты), ей можно просто пренебречь. Тогда, измерив разность моментов захода ΔT и зная продолжительность солнечных суток T, мы фактически определили понижение горизонта $\varphi = \frac{\Delta T}{T} \cdot 2\pi$ (в радианах) с высоты наблюдателя h.



Из рисунка видно, что

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+h} = \frac{R+h-h}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R}.$$

В принципе, для вычисления радиуса планеты R этого достаточно, но если среди «бытовых предметов» нет калькулятора, то стоит упростить себе жизнь, вспомнив, что косинус малого угла, выраженного в радианах, можно представить как

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

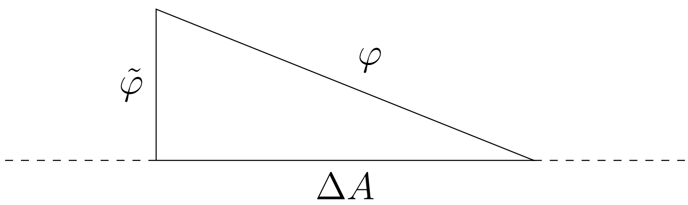
Отсюда

$$\frac{\varphi^2}{2} \approx \frac{h}{R}$$

и окончательно получаем

$$R = \frac{2h}{\varphi^2}.$$

Если же ситуация более сложная и азимуты точек заходов существенно различаются, то «Солнце» заходило за горизонт не под прямым углом к горизонту, и измеренное нами время фактически соответствует большему понижению горизонта, чем есть на самом деле (а вычисленный радиус планеты окажется заниженным). Чтобы это учесть, нарисуем еще один чертеж:



Это траектория верхнего края диска «Солнца» по отношению к горизонту. Тут ΔA — измеренная нами разность азимутов, φ — полученное по разности времен неправильное «понижение горизонта», $\tilde{\varphi}$ — настоящее понижение горизонта. Очевидно, что $\tilde{\varphi} = \sqrt{\varphi^2 - \Delta A^2}$, после чего в итоговую формулу для радиуса нужно будет подставлять $\tilde{\varphi}$ вместо φ.

Определение массы планеты. В первую очередь следует определить ускорение свободного падения. Самый эффективный способ сделать — соорудить математический маятник (вернее, его подобие) с известной длиной l и измерить его период

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда можно вычислить g. Затем, зная радиус планеты и ускорение свободного падения, можно найти массу:

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Соображения об оценках погрешностей. Грубо прикинуть погрешность результатов можно, оценив возможную точность производимых измерений. Например, все измерения углов заведомо проводятся с точностью, не превышающей угловое разрешение человеческого глаза $(1' \div 2')$, а все расстояния измеряются с погрешностью как минимум в 1 мм. Тогда, взяв в качестве средних значений что-то характерное, например, для Земли, можно посмотреть, как будут изменяться результаты при изменении параметров на характерную величину ошибки.

Еще один способ — привлечение исторических сведений. Многие параметры Земли определялись подобными методами, соответственно, можно просто вспомнить, с какой точностью это делалось при использовании аналогичных инструментов.

Задача № 74

Вам дана последовательность негативных изображений четырех экзопланет, обращающихся вокруг молодой звезды с видимой звездной величиной 6^m. Звезда на снимках экранирована, ее положение отмечено звездочкой. На изображениях приведены даты получения снимков и характерный масштаб: длина полоски соответствует 20 а.е. (20 au).

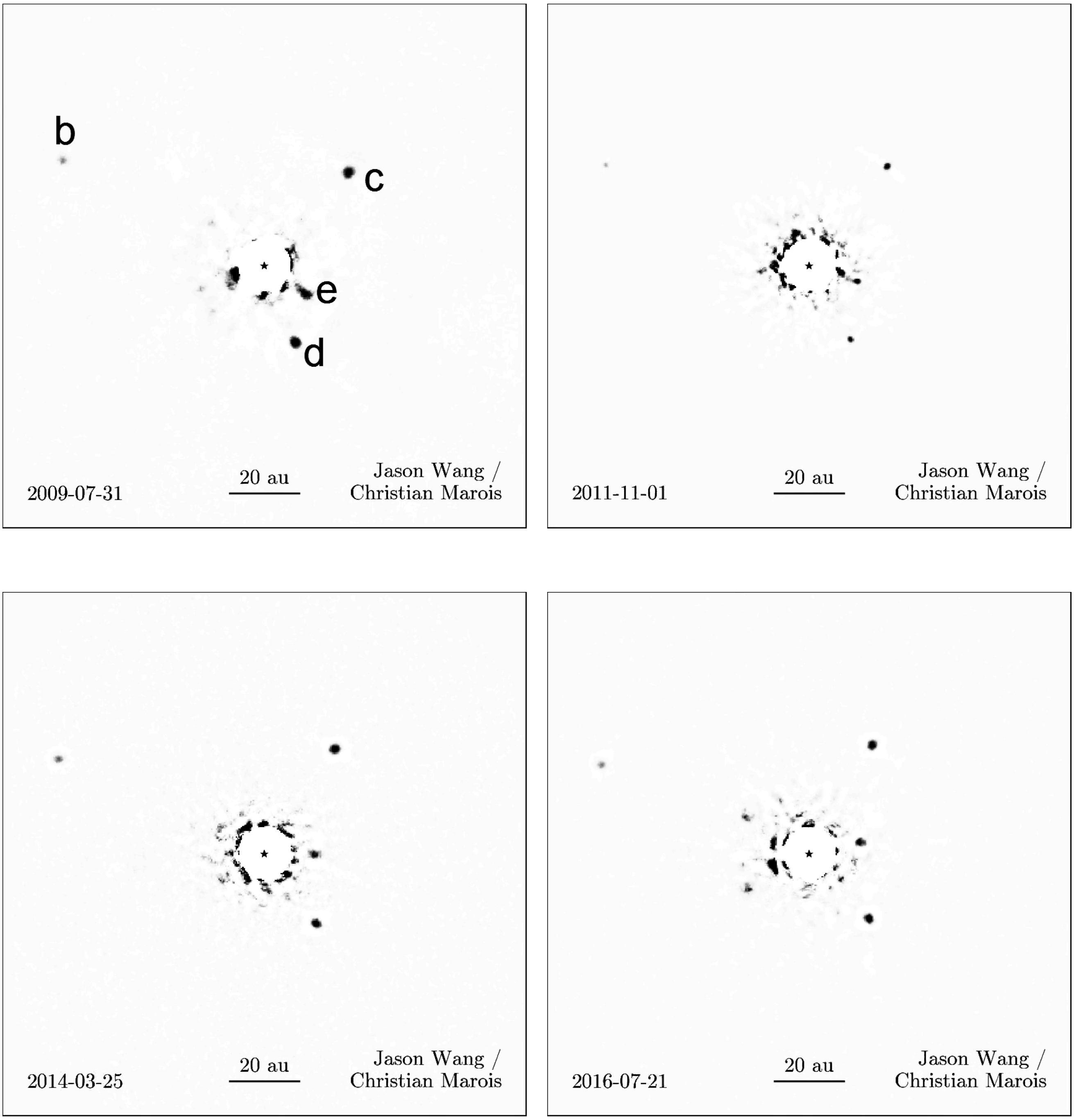
Оцените следующие величины:

- радиусы орбит планет;
- периоды обращения планет;
- массу звезды;
- температуры планет;
- температуру звезды.

Как Вы думаете, на какой из этих планет (или каких) принципиально возможно наличие жизни земного типа? Почему?

Расстояние от Солнца до планетной системы составляет 130 световых лет. Орбиты планет можно считать круговыми, плоскость орбит — лежащей перпендикулярно лучу зрения. Все объекты считать чернотельными. Ориентацию всех снимков можно считать одинаковой.

Итоговый ответ про планеты оформите в виде таблицы.



Решение. В условии задачи приведены изображения планетной системы около звезды HR 8799, которая послужила «прототипом» системы в задаче. Планеты на первом снимке обозначены буквами от b до e (порядок букв соответствует порядку, в котором планеты были обнаружены).

Проще всего определить радиусы орбит планет, измерив расстояние от планеты до звезды линейкой. Результаты измерения приведены в таблице в конце решения.

Определение орбитальных периодов планет можно провести как минимум двумя способами. Во-первых, при помощи транспортира можно определить угол, на который повернулись планеты за время наблюдения. Тем самым, зная даты получения снимков, можно определить угловые скорости планет и, следовательно, их периоды обращения. Во-вторых, независимо оценив массу звезды (см. ниже), можно воспользоваться III законом Кеплера и получить периоды обращения по известным радиусам.

Поскольку нам известно расстояние до звезды (его удобнее перевести в парсеки, получится около 40 пк) и ее видимая звездная величина, можно определить абсолютную звездную величину звезды: $M = m - 5\lg r + 5 = 3^m$ (при этом придется вычислить $\lg 40$, что можно сделать, например, т.к. $\lg 40 = \lg 10 + \lg 4 = 1 + 2\ \lg 2 \approx 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = 5/3$).

Так как звезда молодая, то она является звездой Главной Последовательности, и для нее можно воспользоваться соотношением между светимостью и массой звезд ГП:

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^4.$$

Звезда ярче Солнца примерно на 2^m, так что ее светимость больше солнечной примерно в $2.5^2 = 6.3$ раза, а масса, соответственно, в $\sqrt{2.5} \approx 1.6$.

Тут тоже можно действовать другим путем: зная орбитальные периоды планет и радиусы их орбит, найти массу звезды из III закона Кеплера (результат, естественно, окажется таким же). Так как

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{M} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2},$$

можно по данным для каждой из четырех планет получить оценку массы звезды, после чего вычислить среднее всех четырех оценок. При этом удобно выражать радиусы орбит в астрономических единицах, а периоды — в годах. В этом случае, если масса звезды выражена в массах Солнца, $G = 4\pi^2$, и вычисления существенно упрощаются.

Теперь займемся температурами планет. Для того, чтобы на чернотельной планете с радиусом R, находящейся на расстоянии a от звезды со светимостью L, установилась некоторая температура T, нужно, чтобы в единицу времени планета поглощала столько же энергии от звезды, сколько излучает сама. Запишем соответствующее соотношение:

$$\frac{L}{4\pi a^2} \cdot \pi R_p^2 = 4\pi R_p^2 \sigma T^4,$$

где R_p — радиус планеты, σ — постоянная Стефана-Больцмана. Отсюда

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{16\pi\sigma a^2}}.$$

Для вычислений этой формулы достаточно, но можно немного упростить работу, если записать такое же выражение для Солнца и Земли (конечно, Земля не является абсолютно черным телом, но, с другой стороны, поправочный коэффициент, определяемый альбедо Земли, будет порядка единицы, при вычислении температуры из него будет извлекаться корень четвертой степени, так что результат при таком приближении изменится слабо). Тогда

$$T_\oplus = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{16\pi\sigma a_\oplus^2}}$$

и

$$\frac{T}{T_\oplus} = \frac{\sqrt[4]{L/L_\odot}}{\sqrt{a/a_\oplus}} = \frac{\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot}{\sqrt{a}},$$

где в последнем выражении a измеряется в астрономических единицах. Заодно мы воспользовались связью между массой и светимостью звезды. Осталось сказать, что $T_\oplus$ — равновесная температура Земли — около $3 \cdot 10^2$ K, после чего можно вычислять температуры (результаты вычислений находятся в таблице в конце решения).

Однако при такой оценке мы предполагаем, что планеты не имеют собственных источников энергии. Если это не так (а в реальной планетной системе HR 8799 это действительно не так), то полученные нами оценки температур являются лишь минимально возможными значениями, а реальные температуры по имеющимся данным определить невозможно.

Зато возможно дать однозначный ответ на вопрос о возможности наличия жизни. Если планеты не имеют собственных источников энергии, то их равновесные температуры слишком малы для того, чтобы на них могла иметься вода в жидком виде (а она для жизни земного типа необходима). Конечно, можно попытаться учесть возможность наличия парникового эффекта и т.п., но в такой ситуации лучше задуматься над другим вопросом: почему мы вообще видим планеты предположительно земного типа на достаточно большом расстоянии от соответствующей звезды? Даже без численных оценок очевидно, что это возможно только в том случае, если планеты очень большие или очень горячие (или и то, и другое сразу, что в действительности и реализуется). Соответственно, сам факт возможности прямого наблюдения этих планет означает, что жизнь земного типа на горячих (и, как следствие, очень молодых) планетах-гигантах нереальна.

Остался последний вопрос — оценка температуры звезды T_*. Тут можно либо вспомнить вид диаграммы Герцшпрунга-Рассела и сказать, что звезда ГП с $M = +3^m$ лежит где-то между звездами спектрального класса G (как Солнце), температура которых около $6 \cdot 10^3$ K, и класса A (как Сириус или Вега) — с температурой $10 \cdot 10^3$ K. Взяв среднее, получим близкую к действительности оценку $8 \cdot 10^3$ K.

Второй вариант оценки можно получить, вспомнив, что радиусы (R) и светимости звезд ГП соотносятся примерно как $L \propto R^5$. Поскольку $L \propto R^2 T_*^4$, то $T_*^4 \propto R^3 \propto L^{3/5}$. Отсюда $T_* \propto L^{3/20}$ или, вспоминая уже известное соотношение $L \propto \mathfrak{M}^4$, $T_* \propto \mathfrak{M}^{3/5}$. Вычисляя $1.6^{3/5} \approx 1 + 0.6 \cdot 0.6 = 1.36$ и умножая это на известную температуру Солнца $6 \cdot 10^3$ K, получаем те же 8 тысяч кельвинов.

Итоговая таблица:

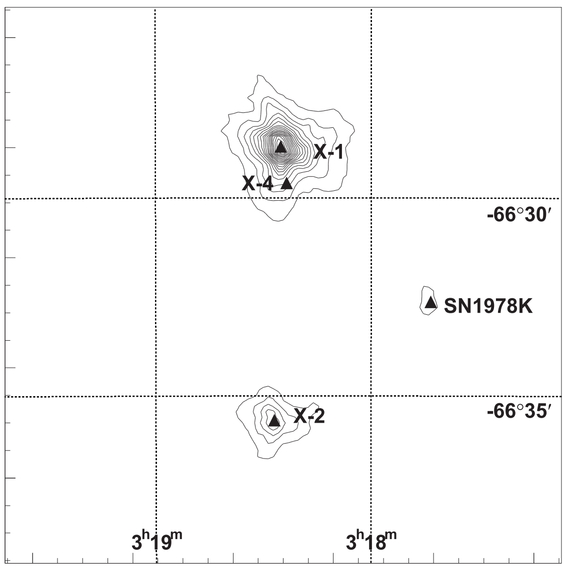
№	Планета	a, а.е.	P, лет	T, К
1	e	15	58	120
2	d	24	73	100
3	c	38	146	80
4	b	68	350	60

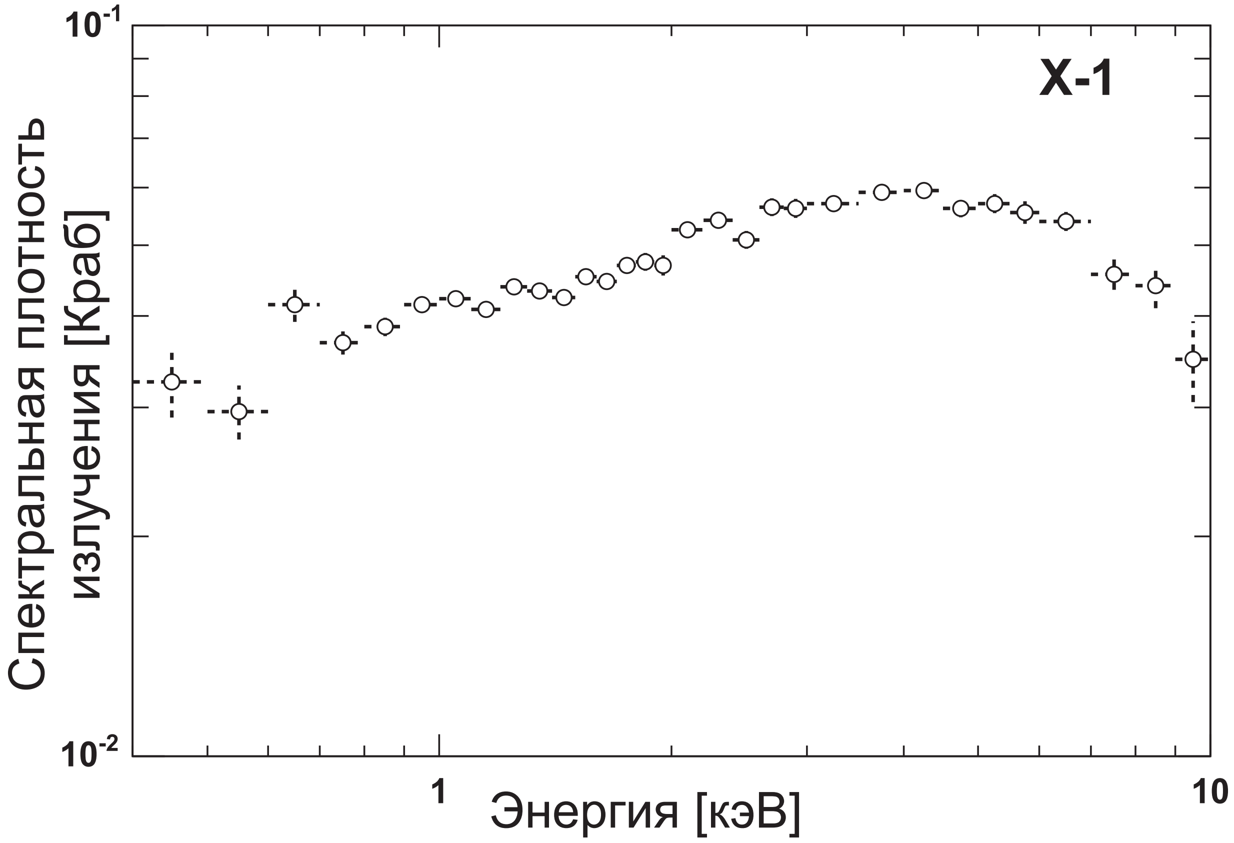
Задача № 75

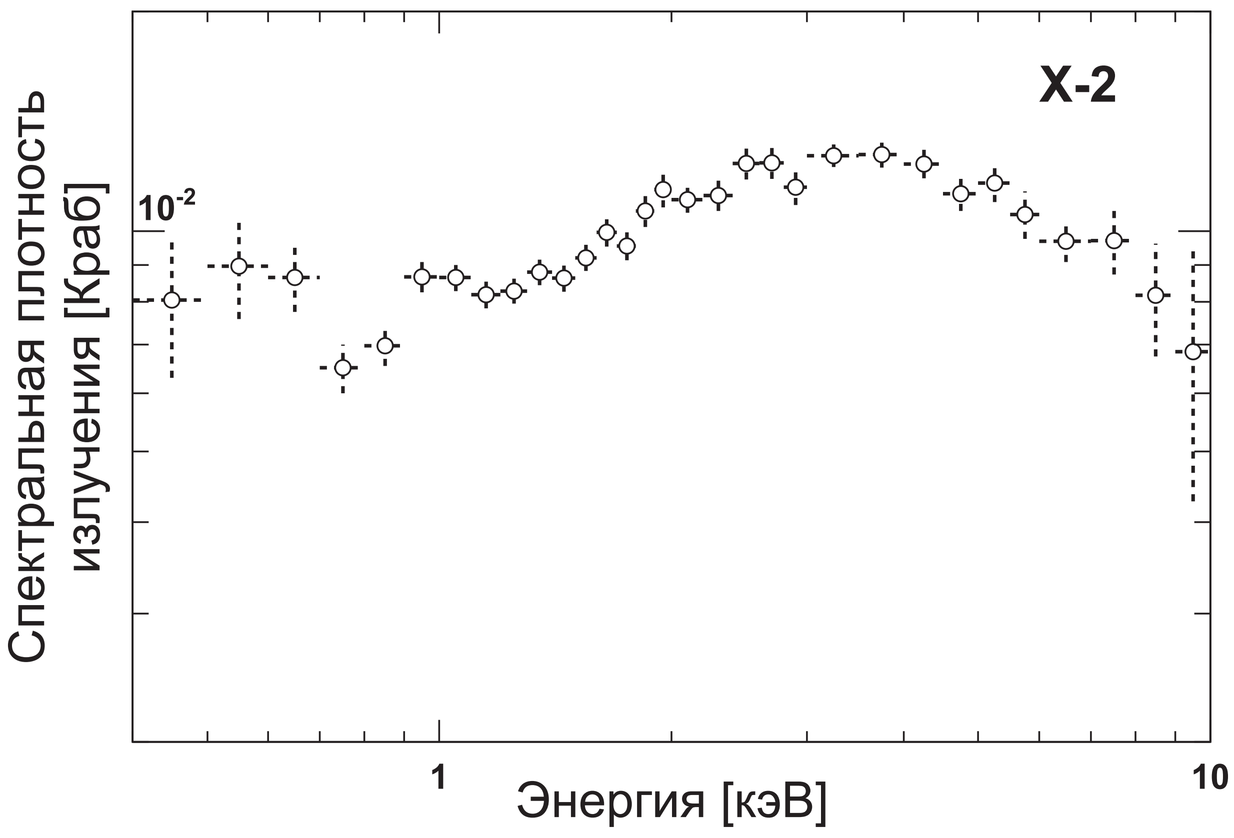
Вам дана карта, на которой отмечены источники рентгеновского излучения X-1 и X-2, находящиеся в галактике NGC 1313 в созвездии Сетки. По вертикальной оси карты отложено склонение, по горизонтальной — прямое восхождение. Кроме этого, на отдельном листе приведены спектры источников, где спектральные плотности потока принимаемого излучения выражены в условных единицах «Краба» — излучения в рентгеновском диапазоне от Крабовидной туманности, 1 Краб $= 2.6 \cdot 10^{-14}$ Вт/(м$^2\cdot$ кэВ). Расстояние до NGC 1313 составляет 3.7 Мпк. На всякий случай упомянем, что 1 кэВ — единица измерения энергии, равная $1.6 \cdot 10^{-16}$ Дж.

Определите минимально возможные светимости этих источников. Считая, что излучение обоих источников образуется при аккреции (т.е. падении) водородной плазмы на компактный объект, оцените минимально возможные массы этих объектов. Что это за объекты? Могла ли вспышка указанной на карте сверхновой SN 1978K в той же галактике быть причиной свечения данных объектов?

Можно считать, что фотон сталкивается с электроном плазмы, если попадает в «поперечное сечение электрона» $\sigma_T = 6.6 \cdot 10^{-25}$ см^2 (оно называется томпсоновским сечением электрона), взаимодействием протонов с фотонами можно пренебречь.




X-1
10-1
10-2
1
10
Спектральная плотность излучения [Краб]
Энергия [кэВ]


X-2
10-2
1
10
Спектральная плотность излучения [Краб]
Энергия [кэВ]

Решение. Поскольку у нас имеются данные об излучении источников только в части рентгеновского диапазона, то, очевидно, оценить минимально возможную светимость можно, если найти светимость в диапазоне, для которого приведены данные. Оба графика устроены однотипным образом: по оси абсцисс в логарифмическом масштабе отложена энергия кванта в кэВ, по оси ординат — спектральная плотность потока излучения. Соответственно, освещенность, создаваемую каждым из объектов, можно получить, если для каждого интервала энергий в 1 кэВ найти плотность потока излучения, после чего сложить полученные результаты (фактически мы при этом вычисляем интеграл от графически заданной функции). При этом важно заметить и учесть, что в интервале от 1 кэВ до 10 кэВ штрихи на оси абсцисс соответствуют интервалам в 1 кэВ, а в интервале энергий до 1 кэВ — 0.1 кэВ (например, заменяя все данные, которые находятся левее отметки 1 кэВ, на одну точку со средним значением плотности потока). Следует отметить, что знание, чему именно в джоулях равен 1 кэВ, для решения не требуется.

Измерения дают для источника X-1 около $48 \cdot 10^{-2}$ Крабов · кэВ, а для источника X-2 — $92 \cdot 10^{-3}$ Крабов · кэВ (эти числа могут несколько изменяться в зависимости от аккуратности «численного интегрирования» и, как следствие, все последующие результаты — тоже). Это означает, что источник X-1 создает освещенность $E_1 = 1.3 \cdot 10^{-14}$ Вт/м^2, а источник X-2 — примерно в 5 раз меньше.

Зная расстояние до источников, можно оценить их светимости. $r = 3.7$ Мпк — это примерно $r = 10^{23}$ м, следовательно, так как $L = 4\pi r^2 E$, получаем, что $L_1 \approx 1.5 \cdot 10^{33}$ Вт, $L_2 \approx 3 \cdot 10^{32}$ Вт.

Далее нам придется подумать, каким образом светимость источника может быть связана с массой объекта, на который падает вещество. На первый взгляд кажется, что такой зависимости быть не должно — чем больше вещества упало, тем больше энергии выделилось, и, следовательно, итоговая светимость определяется только темпом аккреции, который нам неизвестен. Однако, посмотрев внимательно на условие, можно обнаружить, что в нем явно упоминается возможность взаимодействия излучения с падающей плазмой. Что бы это значило?

Если в результате аккреции вещества на компактный объект образуется излучение, то возникает и световое давление этого излучения на падающее вещество. По-видимому, возможна ситуация, когда световое давление оказывается настолько большим, что световое давление останавливает дальнейшую аккрецию (заметим, что это действительно т.к. и соответствующий предел светимости носит название «эддингтоновского предела» в честь английского астрофизика Артура Стэнли Эддингтона).

Будем считать, что падающее на компактный объект вещество состоит в основном из водорода. Сразу заметим, что хотя водород явно должен быть ионизован, силы электростатического взаимодействия между протонами и электронами очень велики, и в среднем плазма должна быть электронейтральной. Поэтому то, что масса падающего вещества почти полностью определяется протонами, а давление излучения связано с взаимодействием с излучением электронов, не должно приводить нас к выводу, что все протоны упадут на аккрецирующий объект, а электроны улетят под действием светового давления. Фактически мы можем считать, что в каждом малом элементе объема протонов и электронов примерно поровну.

На один «атом водорода» (для удобства будем так называть условную пару из протона и электрона) со стороны компактного объекта действует сила притяжения

$$F_{\text{грав}} = G\frac{\mathfrak{M}m_p}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}$ — масса объекта, m_p — масса протона (электрон существенно легче, и его массой можно пренебречь), R — расстояние от объекта.

На том же расстоянии R от объекта на «атом водорода» будет действовать давление излучения:

$$E(R) = \frac{L}{4\pi R^2}, \qquad F_{\text{изл}} = \frac{E(R)\sigma_T}{c},$$

где L — уже известная нам светимость объекта, c — скорость света.

Предполагаем, что светимость равна эддингтоновской, т.е. попросту приравниваем $F_{\text{грав}}$ и $F_{\text{изл}}$ и выражаем отсюда массу:

$$\mathfrak{M} = \frac{L\sigma_T}{4\pi c G m_p}.$$

Осталось вычислить массы. Возможно, некоторые не помнят массу протона, однако можно вспомнить, что она с достаточной для нас точностью равна атомной единице массы или, что то же самое, величине, обратной числу Авогадро (если выражать ее в граммах). В итоге $m_p \approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг. Томпсоновское сечение $\sigma_T = 6.6 \cdot 10^{-29}$ м^2. Остальные параметры нам уже известны.

Подставляя числа, получаем, что

$$\mathfrak{M} = L \cdot 0.15 \text{ кг/Вт}.$$

Поскольку у нас есть оценки светимости источников снизу, то, соответственно, и оценки масс также получатся оценками снизу. Минимально возможная масса объекта X-1 равна $\mathfrak{M}_1 = 2 \cdot 10^{32}$ кг (т.е. около 10^2 масс Солнца), соответственно, масса объекта X-2 около $2 \cdot 10^1$ масс Солнца. Таким образом, оба компактных объекта — черные дыры.

Возможное влияние на эти объекты вспышки сверхновой (даже если не вдаваться в обсуждение того, каким именно это влияние могло бы быть) могло случиться в том случае, если информация о вспышке успела добраться до источников рентгеновского излучения. Однако из приведенной в условии карты видно, что угловые расстояния между сверхновой и источниками составляют по крайней мере примерно $5' = 300''$. На расстоянии до галактики около 3.7 Мпк это соответствует линейным расстояниям $3.7 \cdot 10^6 \times 3 \cdot 10^2 \approx 10^9$ а.е., или $10^9/(2 \cdot 10^5) = 5 \cdot 10^3$ пк, т.е. примерно 16 тысяч световых лет. Очевидно, что вспышка сверхновой, свет от которой напрямую дошел до нас, в соответствии с обозначением сверхновой, в 1978 году, не могла повлиять на видимое нами сейчас излучение рентгеновских источников.

Правда, гипотетически возможна ситуация, когда сверхновая находится намного дальше, чем источники, и ее излучение, идущее к нам и к источникам, распространялось практически в одну сторону, но это предположение противоречит информации о том, что сверхновая вспыхнула в той же галактике: для реализации подобного случая нужно, чтобы разность расстояний от нас до источников и до сверхновой существенно — на порядки — превышала 5 кпк (расстояние «в проекции»), но тогда она заведомо превышает размеры любой, даже очень крупной галактики.